

**Université Pierre et Marie Curie, Université Paris-Sud,  
Ecole des Mines de Paris  
& Ecole Nationale du Génie Rural des Eaux et des Forêts**

---

**DEA Hydrologie, Hydrogéologie, Géostatistique et Géochimie**

**Filière Hydrologie et Hydrogéologie Quantitatives**

**Désagrégation Spatio-temporelle des variables issues des  
Modèles de Circulation Général**

**Auteur Angelbert BIAOU**

**Directeurs de recherche : Pierre HUBERT & Pierre RIBSTEIN**

**Laboratoire d'accueil**



**DR&D / LNHE**

**Tuteur : Frédéric HENDRICKX,  
Ingénieur Chercheur**

**30 Août 2000**



*A ma fille Janelle et à mon oncle Jacob*

## REMERCIEMENTS

*MM Pierre HUBERT et Pierre RIBSTEIN, respectivement du CIG de l'Ecole des Mines de Paris et du LGA de l'Université Pierre et Marie Curie ont dirigé ce travail de DEA et mon suivi tout au long de son déroulement, je tiens à les remercier et leur suis infiniment reconnaissant.*

*M Frédéric HENDRICKX de la DR&D, LNHE, Groupe transfert Hydrique de l'EDF, site de Chatou a toujours été à mon écoute durant mon stage au sein de ce laboratoire. Je tiens à le remercier pour sa contribution énorme dans le bon déroulement de mon stage au sein de cette Entreprise.*

*Mes remerciements vont aussi à l'endroit de tout le personnel du Groupe Transfert Hydrique au sein duquel j'ai passé d'agréables moments ayant favorisé le bon déroulement de mon stage. Je remercie particulièrement MM Jean Guy LEDORTZ et Joël Gaillard qui m'ont apporté d'importants soutiens, tant matériels qu'intellectuels.*

*Une mention spéciale à ma petite famille et plus précisément à ma fille née en mon absence. Je tiens à leur témoigner toute ma gratitude pour le sacrifice par eux consenti.*

*A tous mes camarades de DEA promotion 99-2000, je tiens à témoigner ma gratitude pour la bonne ambiance qui a régné en notre sein, et pour ces échanges de mails d'encouragement durant les stages.*

*Que tous ceux ou toutes celles qui m'ont soutenu et aidé, de loin ou de près, trouvent ici l'expression de ma profonde et sincère gratitude.*

*Big whorls have little whorls  
Which feed on their velocity  
And little whorls have lesser whorls  
An so on to viscosity*

*(Richardson, 1922)*

# Table des Matières

<b>TABLE DES MATIERES .....</b>	<b>5</b>
<b>1 INTRODUCTION .....</b>	<b>6</b>
<b>2 CONSIDERATIONS THEORIQUES .....</b>	<b>7</b>
2.1 BREF APERÇU SUR LES MODELES DE CIRCULATION GENERALE .....	7
2.2 LES METHODES DE DESAGREGATION .....	8
2.2.1 <i>Le modèle linéaire de désagrégation temporelle.....</i>	<i>9</i>
2.2.2 <i>L'approche des cascades multifractales.....</i>	<i>13</i>
2.2.2.1 Généralité sur les propriétés fractales des champs de pluie.....	13
2.2.2.2 Les cascades multifractales .....	14
<b>3 MODELISATION .....</b>	<b>20</b>
3.1 MATERIEL ET METHODE.....	20
3.1.1 <i>Site de l'étude.....</i>	<i>20</i>
3.1.2 <i>Modèle linéaire .....</i>	<i>20</i>
3.1.3 <i>Modèle utilisant les cascades multifractales.....</i>	<i>23</i>
3.2 RESULTATS ET COMMENTAIRES.....	24
3.2.1 <i>Le modèle linéaire.....</i>	<i>24</i>
3.2.2 <i>Le modèle utilisant les cascades multifractales .....</i>	<i>28</i>
<b>4 CONCLUSION .....</b>	<b>33</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>34</b>
<b>ANNEXE A: RESULTATS AVANT L'APPLICATION DE LA CORRECTION. ....</b>	<b>36</b>
<b>ANNEXE C : RESULTATS DE CASCADES DU <math>\beta</math>-MODELE.....</b>	<b>45</b>

# 1 Introduction

EDF, cherche de manière permanente à optimiser la gestion de sa production et, depuis l'ouverture des marchés, à pouvoir anticiper la volatilité des prix sur le marché. De ce fait, elle a pour objectif de connaître les états de remplissage de ses réservoirs au moins trois mois à l'avance, afin d'anticiper le productible hydroélectrique à l'échelle nationale et à l'échelle européenne. C'est pour cela que l'un des objectifs de cette société est de pouvoir faire des prévisions de débits, trois mois à l'avance, avec une sortie de débits à chaque mois.

Les modèles hydrologiques sont souvent à l'échelle journalière pour ce qui est du pas de temps et à l'échelle du bassin versant en ce qui concerne l'espace. Or les données météorologiques sont fournies à des échelles beaucoup plus grandes, celles des mailles des modèles de circulation générale. C'est pour cela qu'il s'avère nécessaire de prévoir en amont, un modèle de désagrégation spatio-temporelle de ces données avant de les utiliser dans un modèle hydrologique.

Ainsi, le but de notre stage, dans le cadre du DEA hydrologie, Hydrogéologie, Géostatistiques et Géochimie, au sein de cette société est de proposer un modèle qui pourra procéder à la désagrégation spatio-temporelle des variables telles que fournies par les modèles de circulation générale (GCM<sup>1</sup>) afin de les rendre directement disponible à l'entrée des modèles hydrologique. Deux modèles sont proposés, à savoir : (1) un modèle linéaire de désagrégation temporelle, basé sur la préservation des deux premiers moments et, (2) un modèle de désagrégation spatio-temporelle basé sur les cascades multifractals. Les outils informatiques permettent d'utiliser de façon automatique chacun des deux modèles, car disponible sous forme d'un programme exécutable.

Le présent rapport résume les grandes étapes de ce travail. Sa première partie s'occupe de façon générale des considérations théoriques qui sont à la base de chacun des deux modèles et donne une vue générale sur les modèles de circulation générale.

La deuxième partie parlera des aspects modélisations de chacun des modèles et une synthèse des analyses et commentaires sur les résultats obtenus. La dernière partie sera consacrée aux conclusions et perspectives.

---

<sup>1</sup> *General Circulation Model*

## 2 Considérations théoriques

### 2.1 Bref aperçu sur les modèles de circulation générale

Le climat se définit comme une synthèse des conditions météorologiques dans une région donnée, caractérisée par des statistiques à long terme (valeurs moyennes, variances, probabilités de valeurs extrêmes, etc.) des éléments météorologiques dans cette région (Glossaire International d'Hydrologie UNESCO-OMM, 1992). Cependant, le système climatique présente une très grande complexité. Les interactions des processus physiques produisant le climat couvrent une très grande portée tant à l'échelle spatiale qu'à l'échelle temporelle. Une représentation scientifique exacte du climat dans le détail est théoriquement impossible (Kevin et al, 1991). Et pourtant, afin de se mettre à l'abri de certains effets indésirables des phénomènes de l'atmosphère, il est intéressant voire nécessaire de connaître les effets de changement, dans les conditions limites, du système climatique. De façon générale, les modèles de climat à l'échelle globale, utilisés par les climatologues et météorologues pour les prévisions, sont appelés modèles de circulation générale ou *GCM*. Pour une meilleure compréhension des fonctionnements de ces modèles, se référer aux ouvrages spécialisés (Eagleson, 1986 ; Henderson-Sellers and McGuffie, 1987 ; Washington and Parkinson, 1986) dans lesquels les fonctionnements et les méthodes sont largement traités. En général, les GCM fournissent leur résultat sur de grandes mailles, de l'ordre de 200 à 500 km de côté. A l'échelle du bassin versant, ces résultats sont grossiers et ne prennent donc pas en compte les spécificités du bassin versant. EDF par sa Division Recherche et Développement s'est impliqué dans le projet européen PROVOST ( *Prediction Of climate Variations On Seasonal and international Timescales* ), dont l'objectif est de quantifier la prévision potentielle du climat à l'échelle saisonnière à inter annuelle, et de développer et tester un système quasi-opérationnel de prévision à l'aide de modèles couplés océan-atmosphère. Plusieurs CGM (le modèle du LMD, ARPEGE-Climat de France Météo, modèle du Centre Européen, modèle de UKMO<sup>2</sup>) ont été utilisés pour effectuer les calculs. Pour chacun des modèles utilisés, 9 simulations ont été effectuées, pour chacune des saisons de l'année (hiver, printemps été, automne ) et sur la période allant de 1979 à 1994. La modulation du climat européen simulé en hiver par l'occurrence d'événement El Niño /La Niña sur le pacifique intertropical est prise en compte ces jeux de simulations.

---

<sup>2</sup> United Kingdom Meteorology Office

Des simulations ont été effectuées à des résolutions assez basses avec le modèle ARPEGE-Climat en partenariat avec France-Météo. Les résultats de ces simulations sont consignés dans des bases de données disponibles à EDF ( Groupe Météo et Climat). Il s'agit des simulations de ARPEGE-Climat T42 (dont la résolution est de l'ordre de  $2.5^{\circ} \times 2.5^{\circ}$ ) et de ARPEGE-Climat T63 (dont la résolution est de l'ordre de  $1.8^{\circ} \times 1.8^{\circ}$ ). Pour chacune de ces simulations, des fichiers de précipitation totale, de précipitations liquide et solide, des températures minimales et maximales, à 850 hPa et au sol..., ont été constitués. Les résultats sont présentés sous forme de moyennes mensuelles sur chacune des mailles.

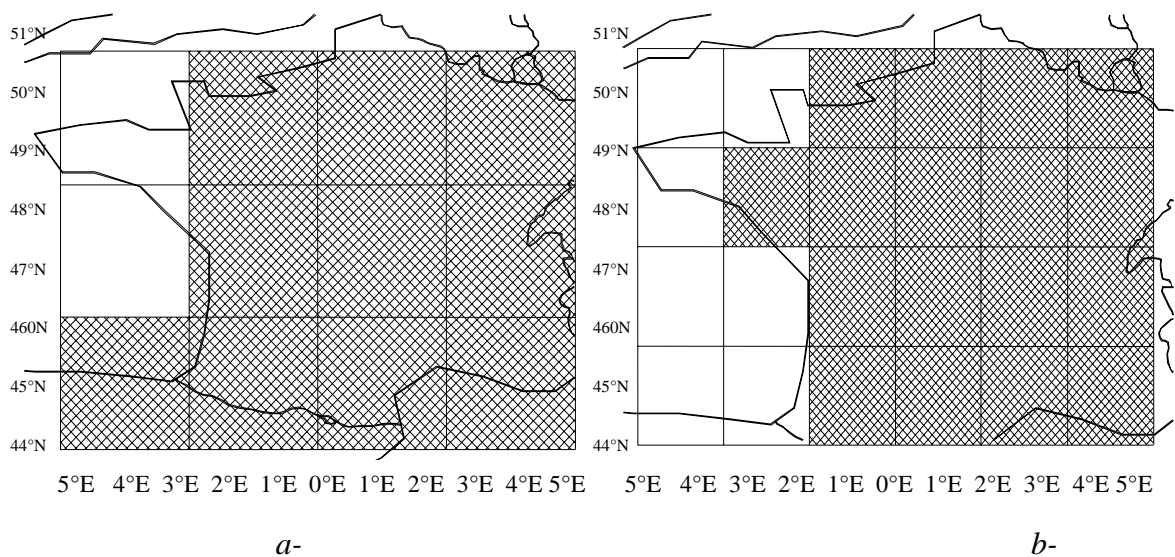


Figure 1 Maillages France pour les grilles ARPEGE T42 et ARPEGE T63. a- Maillage modèle ARPEGE T42 (128x64), b- Maillage modèle ARPEGE T63 (192x96).

La maille numérotée 1 est la maille de la grille ARPEGE T42, contenant le sous bassin-versant le Doubs sur lequel nous travaillons et les mailles 2 et 3 sont celles de ARPEGE T63 qui contiennent ce sous bassin-versant.

Le modèle de désagrégation que nous sommes chargés de proposer devra être en mesure de désagréger les différents résultats fournis par ces modèles.

## 2.2 Les méthodes de désagrégation

Dans les problèmes de passage de grandes échelles (spatiales et temporelles) aux plus petites, la désagrégation est l'une des techniques les plus utilisées. Il est bien connu que les modèles de désagrégation, comme tant d'autres, ne sont pas des modèles exacts, mais ils fournissent des valeurs approximatives suffisantes pour les utilisations qu'on en fait (Stedinger and Vogel, 1984 ; Koutsoyiannis 1992), les résultats de ces modèles étant



statistiquement vraisemblables dans le domaine d'étude. Plusieurs auteurs ont utilisé Cette technique pour résoudre des problèmes spécifiques à des régions données. On peut distinguer des modèles linéaires de désagrégation (Valencia et Schaake, 1973 ; Koutsoyiannis, 1992 1993) basés sur des calculs statistiques simples et la théorie de l'algèbre matricielle. Cependant, des modèles plus complexes proposent des méthodes de désagrégation assez fine, jusqu'aux événements pluvieux (Woolhiser and Osborn, 1985 ; Rodriguez-Iturbe et Eagleson (1987) ; Hershenhorn and Woolhiser, 1987 et Guillot and Lebel, 1999). Ces méthodes font plus appel à des connaissances approfondies des calculs mathématiques. Les cascades fractales peuvent contribuer très efficacement à la conception d'un modèle de désagrégation des pluies. En effet, Lovejoy, 1982 a établi l'applicabilité des fractales en météorologie en montrant que les zones de nuages et de pluie se projettent sur la terre suivant des formes dont les frontières sont des courbes fractales et que la structure temporelle et spatiale de la pluie a des caractéristiques hyperboliquement distribuées (Lovejoy, 1981). Ces observations ont provoqué la construction de modèles fractals avec les propriétés observées (Lovejoy and Mandelbrot, 1985). Les cascades multifractales constituent une modélisation phénoménologique des objets fractals. Cette technique a fait l'objet de plusieurs études (Marsan et al., 1996 ; Schertzer et Lovejoys, 1994 ; Deidda, 2000). Nous en faisons une description détaillée plus loin.

### 2.2.1 Le modèle linéaire de désagrégation temporelle

La technique que nous exposons dans cette partie est celle introduite par Valencia et Schaake, 1973. Elle a été développée pour générer des séries chronologiques de valeurs hydrologiques dans lesquelles les variances et covariances tiennent compte des variations saisonnières. Tao et Delleur, 1976 ont utilisé cette technique pour désagréger les pluies annuelles en pluies mensuelles.

Si on suppose que  $X$  est le vecteur des  $m$  variables initiales  $x_i$  et  $Y$  celui des  $n$  variables aléatoires générées  $y_{ij}$ , le modèle s'écrit

$$Y=AX+W \tag{1.2.1}$$

$A$  est une matrice ( $n \times m$ ) de coefficient et  $W$ , un vecteur aléatoire de  $n$  valeurs aléatoires, indépendantes de  $x_i$ , représentant les aléas de la méthode. Dans l'application du modèle, les données historiques serviront à déterminer les coefficients de la matrice  $A$  et du vecteur aléatoire  $W$ . Supposons que le vecteur des données annuelles ainsi que celui des données désagrégées se notent respectivement :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \dots \\ y_{1J} \\ y_{21} \\ \dots \\ y_{2J} \\ \dots \\ \dots \\ y_{sJ} \\ \dots \\ y_{sJ} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{Station } 1 \\ \dots \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Station } 2 \\ \dots \end{array} \right\} \\ \dots \\ \left. \begin{array}{l} \text{Station } s \\ \dots \end{array} \right\} \end{array}$$

(1.2.2)

L'indice  $J$  est le pas de la désagrégation. Par exemple, pour une désagrégation journalière, à partir des données mensuelles,  $J$  prend les valeurs 28 (ou 29), 30 ou 31 suivant que le mois en cours de traitement est février, avril ou janvier..., et  $s$  caractérise le nombre de stations. Dans ce cas,  $y_{ij}$  est l'élément du vecteur colonne  $\mathbf{Y}$  qui caractérise la hauteur totale de pluie au jour  $j$  et à la station  $i$ . On peut écrire le vecteur résidu  $\mathbf{W}$  sous la forme  $\mathbf{W}=\mathbf{BV}$ ,  $\mathbf{V}$  étant un vecteur aléatoire ayant pour composantes des valeurs aléatoires qui suivent une loi normale centrée réduite et  $\mathbf{B}$  étant une matrice carrée de coefficients qui permettent de préserver les propriétés de  $\mathbf{W}$ . L'équation (1) peut alors s'écrire :

$$\mathbf{Y}=\mathbf{AX}+ \mathbf{BV} \tag{1.2.3}$$

Sous cette forme, les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{ps} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{P1} & \dots & a_{Ps} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \dots & b_{1P} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{pP} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{P1} & \dots & \dots & \dots & b_{PP} \end{bmatrix} \tag{1.2.4}$$

Dans cette expression, l'indice  $p$  s'écrit :  $p=(i-1)J+j$  avec  $i=1,2,\dots,s$  ;  $j=1,2,\dots,J$ .

On voit que le nombre total d'éléments de  $\mathbf{y}$  pour un mois donné est  $P=(s-1) \times J+J=s \times J$ .

Pour estimer les paramètres du modèle, on part des données historiques pour générer les valeurs des coefficients de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , en identifiant les moyennes, variances et covariances du

modèle à celles des données historiques. Pour écrire les moments d'ordre 2, on accepte les notations suivantes :

$$S_{xx} = E[XX^T], S_{xy} = E[XY^T], S_{yx} = E[YX^T], S_{yy} = E[YY^T] \quad (1.2.5)$$

où  $X^T$  et  $Y^T$  désignent respectivement les vecteurs transposés de  $X$  et  $Y$ .

$$\text{On montre que } E[YX^T] = A E[XX^T]$$

(1.2.6)

$$\text{De sorte que } A = S_{yx} (S_{xx})^{-1}$$

(1.2.7)

$$\text{Il s'en suit donc que } E[YY^T] = A E[XX^T] A^T + B E[VV^T] B^T$$

(1.2.8)

Puisque le vecteur  $V$  suit une loi normale réduite, alors  $[VV^T] = I$ , la relation (1.2.7)

$$\text{devient alors : } BB^T = S_{yy} - S_{yx} S_{xx}^{-1} S_{xy}$$

(1.2.9)

Soient  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  les estimateurs respectifs de  $A$  et  $B$ . On a respectivement :

$$\hat{A} = \hat{S}_{yx} \hat{S}_{xx}^{-1} \quad (1.2.10)$$

$$\hat{B}\hat{B}^T = \hat{S}_{yy} - \hat{S}_{yx} \hat{S}_{xx}^{-1} \hat{S}_{xy} \quad (1.2.11)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour l'estimation de  $B$  est que la matrice  $\hat{B}\hat{B}^T$  soit définie positive. Cette condition est très bien satisfaite, la preuve étant établie par (Valencia et Schaake, 1973). Les valeurs désagrégées doivent respecter les totaux ou moyennes mensuelles. C'est pour cela qu'on écrit que la somme<sup>3</sup> des valeurs de  $Y$  sur toutes les valeurs désagrégées, pour un site donné, doit donner la valeur mensuelle initiale pour ce

$$\text{site : } x_i = \sum_{j=1}^q Y_{ij} \quad (1.2.13)$$

De façon générale, on pourra écrire que

$$X = CY \quad (1.2.14)$$

---

<sup>3</sup> Dans le cas des variables intensives comme la température, la somme doit être remplacée par la moyenne.

$$\text{Avec } C = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.15)$$

On a la série de relations suivante :

$$\hat{S}_{xy} = \hat{S}_{yy}^{-1} C^T ; \hat{S}_{yx} = C \hat{S}_{yy}^{-1} ; \hat{S}_{xx} = C \hat{S}_{yy}^{-1} C^T \quad (1.2.16)$$

ce qui permet d'exprimer A et B sous la forme :

$$\hat{A} = \hat{S}_{yy} C^T (C \hat{S}_{yy} C^T)^{-1} \quad (1.2.17)$$

$$\hat{B} \hat{B}^T = \hat{S}_{yy} - \hat{S}_{yy} C^T (C \hat{S}_{yy} C^T)^{-1} C \hat{S}_{yy} \quad (1.2.18)$$

L'équation (2.17) permet de déterminer les coefficients de A en fonction de la matrice de covariance  $\hat{S}_{yy}$ . Pour déterminer les coefficients de la matrice B, il suffit de résoudre l'équation (2.18). Une excellente méthode pour la résolution de cette équation est celle des composantes principales (Tao et Delleur, 1975). La matrice  $\hat{B} \hat{B}^T$  étant semi-définie positive, cette méthode peut être appliquée sans problème pour notre cas. Pour ce faire, il suffit de poser que  $B = U \Lambda^{\frac{1}{2}}$  où  $\Lambda^{\frac{1}{2}}$  est la matrice diagonale dont les éléments de la diagonale sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice  $\hat{B} \hat{B}^T$  et U, la matrice des vecteurs propres associés. Les expressions utilisées pour le calcul des moments sont celles fournies par la méthode du maximum de vraisemblance.

Considérons de façon générale un échantillon de N observations. Si  $\mathbf{x}$  désigne le vecteur des variables, l'échantillon de N observations de la variable vectorielle  $\mathbf{x}$  peut s'écrire sous la forme  $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N)$ . On peut représenter les valeurs réelles de cet échantillon sous la forme :

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & \dots & x_{pN} \end{pmatrix} \quad (1.2.19)$$

Dans cette représentation, la ligne i caractérise les N observations de la variable i (hauteur de pluie du premier janvier par exemple). Notons  $\bar{x}$  la moyenne de l'échantillon constitué par les n observations du vecteur  $\mathbf{x}$ , on peut écrire que

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_{1i} \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_{pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{pmatrix}.$$

(1.2.20)

Le vecteur moyenne de la variable  $\mathbf{x}$  sera noté  $\mu$ . Son estimateur  $\hat{\mu}$ , obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance, s'identifie (Anderson T.W., 1958) à la moyenne de l'échantillon et a pour expression :

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.2.21)$$

De même, on montre que l'estimateur de la matrice de covariance  $\Sigma$  s'écrit :

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T \quad (1.2.22)$$

En remarquant que  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T = \sum_{i=1}^n x_i x_i^T - N \bar{x} \bar{x}^T$ , on peut écrire les éléments

de la matrice de covariance sous la forme :

$$(\hat{\Sigma})_{ij} = \frac{1}{N} \left( \sum_{k=1}^N x_{ik} x_{jk} - N \bar{x}_i \bar{x}_j \right) \quad (1.2.23)$$

## 2.2.2 L'approche des cascades multifractales

### 2.2.2.1 Généralité sur les propriétés fractales des champs de pluie

Une fractale est une forme non régulière qui apparaît inchangée quand on l'examine par différentes résolutions (Lovejoy et Mandelbrot, 1985). Ce terme a été utilisé pour la première fois par Mandelbrot pour décrire le chaos qui règne dans les phénomènes naturels (Mandelbrot, 1974). Si initialement, seuls les objets géométriques étaient à l'origine de cette approche, de nos jours, le terme fractal se retrouve dans plusieurs disciplines, notamment en Hydrologie et Dans les sciences de l'atmosphère. C'est dans ce sens que Lovejoy, 1983, examine les aspects du champ de l'intensité de la pluie et en déduit que les variations respectent des lois d'invariance d'échelles, conduisant à une géométrie fractale. Il établit ainsi, que le champ de pluie est composé d'un grand nombre de discontinuités (fronts) dont on n'aperçoit que les plus importantes (effet *Noé*), et que des fluctuations existent à toutes les échelles, fluctuations régies par une loi d'invariance d'échelle. Il en déduit donc que la forme des aires de pluie est de géométrie fractale. Fort de cette conclusion, nous utilisons ce

caractère fractal des champs de pluie pour étudier les propriétés climatiques lors des changements d'échelles spatio-temporelles. Les caractéristiques fractales ou multifractales des champs de pluies sont très utilisées dans les problèmes de changement d'échelle et dans les études des séries de pluies, par exemple Hubert et Bendjoudi, 1997. Les caractéristiques fractales et multifractales ont été observées et analysées, tant dans l'espace (Lovejoy, 1981, Schertzer et Lovejoy, 1987, Olsson et Niemczynowicz, 1995) et dans le temps (Hubert et Carbonnel, 1989 ; Hubert et al., 1993), que dans les deux dimensions à la fois (Marsan et al., 1996 ; Deidda, 2000).

### 2.2.2.2 Les cascades multifractales

Plusieurs auteurs (Masan et Lovejoy, 1996 ; Olsson et Niemczynowicz, 1995) ont proposé des modèles spatio-temporels des champs de pluies basés sur des dynamiques d'échelles, à partir de décompositions en cascades des pluies. Ces décompositions sont basées sur le principe d'invariance des processus élémentaires, souligné ci-dessus.

**Principe de la méthode :** On divise le parallélépipède initial de côté  $L_x, L_y, L_t$ , en  $\lambda_x \times \lambda_y \times \lambda_t$  structures,  $\lambda_i$  étant un entier. Le facteur d'échelle  $\lambda_i$  est tel que  $\lambda_i = L_i / l_i$ ,  $l_i$  étant le côté des nouvelles mailles obtenues pour la dimension  $i$ . On effectue la même décomposition sur chacune des structures obtenues, et on continue le processus jusqu'à une échelle satisfaisante. Généralement, on a  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda \neq \lambda_t$ . Ceci est dû à l'anisotropie qui existe entre les dimensions d'espace et de temps. En général, il existe une relation simple entre  $\lambda$  et  $\lambda_t$  :

$$\lambda_t = \lambda^{1-H} ; H \text{ est le coefficient d'anisotropie.}$$

Les champs obtenus sous différentes échelles peuvent être exprimés par des relations statistiques indépendantes d'une échelle à l'autre (Olsson et Niemczynowicz, 1996). Une de ces relations lie les moments statistiques à chaque échelle caractérisée par  $\lambda$  (Schertzer and lovejoy, 1987) et s'exprime par :

$$\langle \mathcal{E}_\lambda^q \rangle = \lambda^{K(q)} \tag{1.3.1}$$

où  $\langle \mathcal{E}_\lambda^q \rangle$  est la moyenne d'ensemble du moment d'ordre  $q$  du champ étudié et  $K(q)$ , est une fonction caractéristique du comportement multifractal dite fonction de structure. Pour chacun des  $\lambda$ , le volume d'eau de pluie  $\mathcal{E}_\lambda$  dans chaque maille est obtenu en faisant la moyenne des valeurs enregistrées au niveau des stations de mesure contenues dans cette maille.

$K(q)$  peut être obtenu en traçant dans un système log-log, les valeurs expérimentales de  $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle$  en fonction de  $\lambda$ . La valeur de  $K(q)$  n'est rien d'autre que la pente de la droite obtenue. Cependant, dans le cadre des multifractales universelles, des expressions mathématiques ont été attribuées à  $K(q)$ , par exemple celle proposée par Lovejoy and Schertzer, 1990, qui se met sous la forme :

$$\begin{cases} K(q) = \frac{c_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q), & \alpha \in [0, 1[ \cup ]1, 2] \\ K(q) = c_1 \log(q), & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Il est important de noter que ces expressions permettent de minimiser les erreurs, notamment celles liées à la lecture des graphiques.

La fonction de structure ci-dessus ne dépend que de deux paramètres :  $\alpha$ , appelé coefficient de Levy et  $C_1$ , appelé codimension, dans lequel réside l'invariance d'échelle.

En terme de probabilité, l'expression (1.3.1) peut s'écrire (Schertzer et Lovejoy, 1991):

$Prob[\varepsilon_\lambda > \lambda^\gamma] \approx \lambda^{-c(\gamma)}$ , avec  $c(\gamma)$ , la codimension ci dessus mentionnée. Le terme  $\approx$  traduit l'égalité en englobant les facteurs multiplicatifs constants ainsi que les variations lentes d'échelle (par exemple les échelles logarithmiques)

On définit pour ce processus, une fonction dite de corrélation dans l'espace à deux dimensions et dans le temps sous la forme :

$$\mathfrak{S}_n^{(q_1, q_2)}(|\Delta \underline{x}|, \Delta t) = \langle \varepsilon_n^{q_1}(\underline{x}, t) \varepsilon_n^{q_2}(\underline{x} + \Delta \underline{x}, t + \Delta t) \rangle \quad (1.3.3)$$

Dans le cas simple d'un processus à deux dimension  $(X, Y, 0)$ ,  $\Delta \underline{x}$  est la distance (dans l'espace x,y) qui sépare deux structures à l'échelle  $l_n$  avec  $|\Delta \underline{x}| > l_n$ . Ces deux structures séparées par la distance  $|\Delta \underline{x}|$  sont à peu près des descendants d'une même génération à l'échelle  $l_m$ , ce qui fait que  $l_m = |\Delta \underline{x}|$  (Marsan et al, 1996). Alors, après un calcul mathématique, on arrive à une fonction de structure qui s'écrit :

$$\mathfrak{S}_n^{(q_1, q_2)}(|\Delta \underline{x}|) = l_n^{-[K(q_1) + K(q_2)]} |\Delta \underline{x}|^{K(q_1) + K(q_2) - K(q_1 + q_2)} \quad (1.3.4)$$

De même, en considérant uniquement l'espace des temps  $(0, 0, t)$ , il suffit de poser

$l_m = |\Delta t|^{\frac{1}{1-H}}$ , ce qui conduit à

$$\mathfrak{S}_n^{(q_1, q_2)}(\Delta t) \sim l_n^{-[K(q_1) + K(q_2)]} |\Delta t|^{\frac{1}{1-H} [K(q_1) + K(q_2) - K(q_1 + q_2)]} \quad (1.3.5)$$

En posant que  $\|x, t\| = \max\left\{ |x|, t^{\frac{1}{1-H}} \right\}$ , on peut écrire la fonction de structure

pour l'espace tridimensionnel (x,y,t) :

$$\mathfrak{S}_n^{(q_1, q_2)}(\Delta \underline{x}, \Delta t) \sim l_n^{-[K(q_1)+K(q_2)]} \|\Delta \underline{x}, \Delta t\|^{[K(q_1)+K(q_2)-K(q_1+q_2)]} \quad (1.3.6)$$

H permet de prendre en compte l'anisotropie qui existe entre l'espace (x, y) et l'espace des temps.

Un des modèles de cascade les plus simples, dans la modélisation spatiale de la pluie est celui proposé par Over and Gupta, 1994, Ce modèle a été repris par Gupta et al. (1996), en construisant la cascade sur un carré unité  $J = [0,1]^2$  et en utilisant la théorie des générateurs aléatoires notés IID (Independent and Identically Distributed random generators). Une masse initiale  $\mu_0$  a été distribuée sur l'ensemble du carré unité J par une subdivision successive de l'espace avec pour pondérateurs, les IID variables aléatoires non négatives W appelées « Générateurs de cascades ». Ces variables vérifient la condition  $E(W)=1$  (figure ci dessus), condition qui traduit la conservation de masse. Par exemple, la distribution de probabilité des générateurs pour un modèle bêta peut s'écrire :

$$P(W = 0) = 1 - b^{-\beta}, \quad P(W = b^\beta) = b^{-\beta} \quad (1.3.7)$$

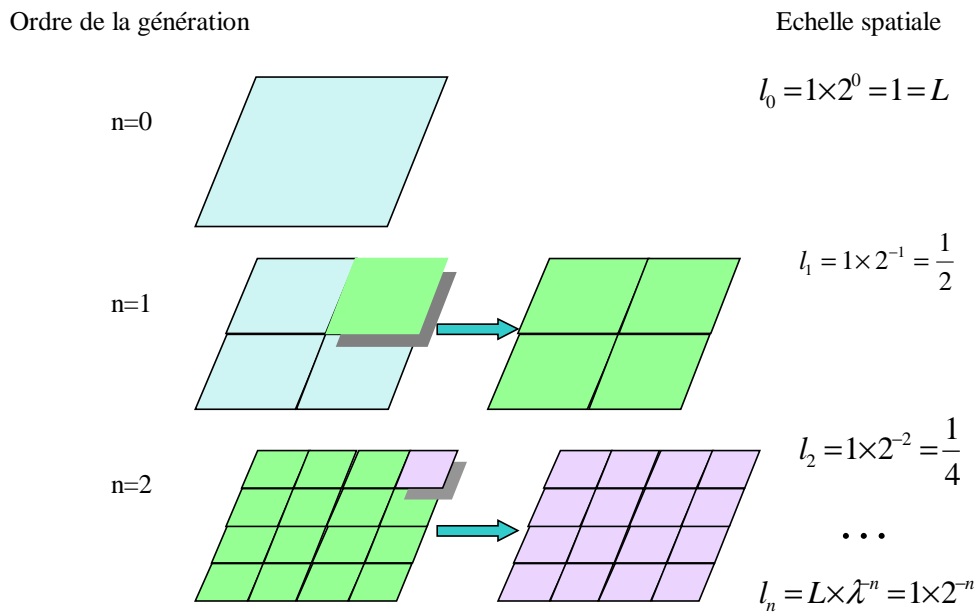


Figure 2 : Cascades multifractales dans un carré unité ( $L=1$ ) pour des subdivisions identiques suivant x et y égales à  $\lambda=2$ , soit une subdivision par 4 de chaque structure.



où  $b$  est appelé « nombre de branches » caractérisant le nombre de subdivisions subi par chaque maille. Dans le cas de la figure ci dessus,  $b=4$ . On voit bien que la condition  $E(W)=1$  est bien satisfaite. Le côté du carré de la  $n^{\text{ième}}$  génération est donné par  $\lambda_n = b^{-n/2}$ . Si  $\Delta_n^i, i = 1, 2, \dots, b^n$  désigne un petit carré ou « pixel » dans  $J$  à l'échelle  $\lambda_n = b^{-n/2}$ , la masse de ce pixel peut s'écrire  $\mu_n(\Delta_n^i) = W_1 \dots W_n b^{-n}$ . Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , cette masse devient

$$\mu_\infty(\Delta_n^i) \stackrel{d}{=} \mu_n(\Delta_n^i) Z_\infty(i), \quad i = 1, 2, \dots, b^n \quad (1.3.8)$$

où le symbole  $\stackrel{d}{=}$  désigne l'identité de la distribution de probabilité. La masse totale dans  $J$  sera donc

$$Z_\infty \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^b W_i Z_\infty(i) \quad (1.3.9)$$

Mandelbrot (1974) et Kahane and Peyriere (1976) ont introduit une fonction pour les calculs des cascades aléatoires. Cette fonction appelée fonction MPK est donnée par

$$\chi_b(h) = \log_b E[W^h] - (h-1), \quad h \geq 0 \quad (1.3.10)$$

Pour le modèle bêta, cette fonction a pour expression :

$$\chi_b(h) = (h-1)(\beta-1) \quad (1.3.11)$$

Kahane and Peyriere (1976) ont montré que pour avoir une masse limite  $\mu_\infty$  non dégénérée, il faut que la fonction MPK vérifie la condition  $\chi_b'(1) < 1$ , ce qui se traduit pour le modèle bêta par  $\beta < 1$ . La fonction MPK permet d'introduire également la notion de dimension de Hausdorff du support de la masse  $\mu_\infty$  pour le carré unité  $J$ , définie par  $D = -2\chi_b'(1)$ . Pour le modèle bêta, cette dimension devient  $D_\beta = 2 - 2\beta$ , ou le paramètre  $2\beta$  peut être interprété comme la codimension du support : différence entre la dimension de l'espace et celle du support. Dans leur développement, Gupta et al. (1996) ont écrit un modèle dans lequel les variables aléatoires  $W$  s'écrivent comme un produit de deux variables aléatoires indépendantes  $W=I_1.I_2$ , où  $I_1$  est le générateur du modèle bêta et  $I_2$  le générateur du modèle log-normal défini par  $I_2 = \exp(\sigma X - \sigma^2/2)$  avec  $\sigma^2 > 1$

La fonction MPK de cette nouvelle variable est donnée par

$$\chi_b'(h) = \log_b E[I_1^h] + \log_b E[I_2^h] - (h-1) \quad (3.10)$$

$$= (h-1)(\beta-1) + \frac{\sigma^2}{\log_e b} (h^2 - h) = (1-\beta) - h \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\log_e b} - \beta \right) + h^2 \frac{\sigma^2}{\log_e b} \quad (1.3.12)$$

On a bien l'équation de conservation  $E[W]=1$ . La condition  $\chi'_b(1) < 1$  conduit à  $2 - 2\beta > \frac{\sigma^2}{\log_e b}$  et la dimension de support de Hausdorff pour ce modèle s'écrit

$$D_{\beta L} = 2 - 2\beta - \frac{\sigma^2}{\log_e b}. \quad (1.3.13)$$

Le  $\beta$ -modèle prend en compte les phénomènes d'intermittence de la turbulence. Dans son application, on impose à chaque élément d'une génération donnée un des deux états possibles : « **vivant** » (élément actif) ou « **mort** » (inactif).

Ces différents états sont définis par le processus binomial suivant

$$\begin{aligned} P(\mu\varepsilon = 0) &= 1 - b^{-\beta} \quad (\text{mort}) \\ P(\mu\varepsilon = b^\beta) &= b^{-\beta} \quad (\text{vivant}) \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

où  $P(x)$  désigne la probabilité de l'événement  $x$

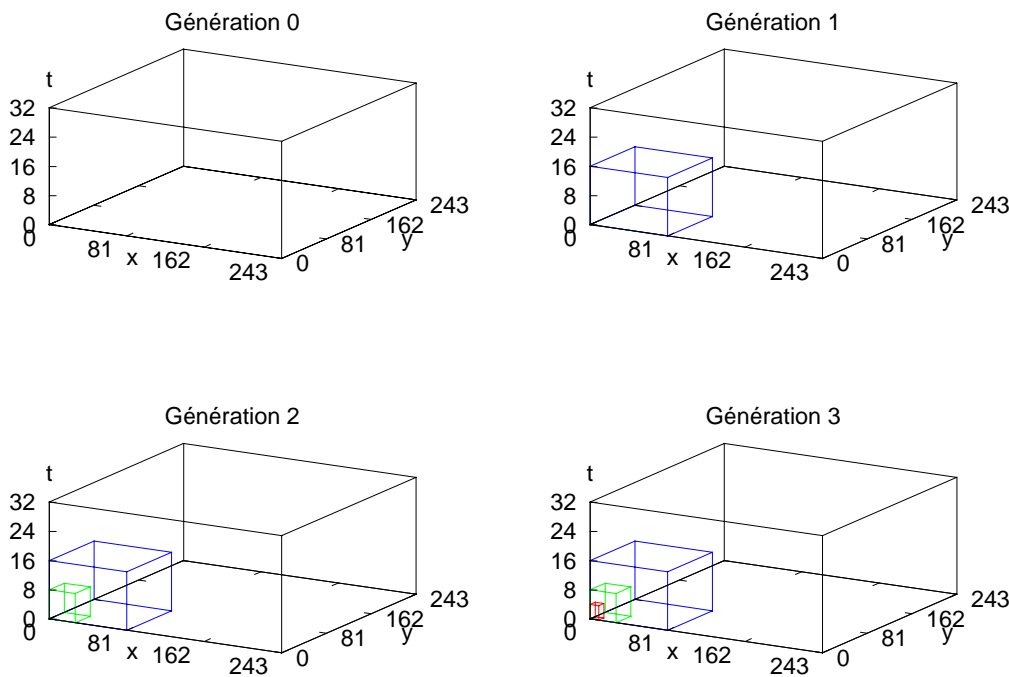


Figure 3 : Cascades multifractales dans un espace à trois dimensions  $(x,y,t)$

L'expression  $\mu\varepsilon = b^\beta$  ( $>1$ ) permet de préserver la moyenne d'ensemble de  $\varepsilon$ . De même, un pixels de la  $n^{\text{ième}}$  génération aura un état vivant ou mort suivant que :

$$\begin{aligned} P(\varepsilon_n = 0) &= 1 - (b^n)^{-\beta} \quad (\text{mort}) \\ P(\varepsilon_n = b^\beta) &= (b^n)^{-\beta} \quad (\text{vivant}) \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on voit bien que la moyenne d'ensemble vaut  $\langle \varepsilon \rangle = b^\beta b^{-\beta} = 1$  ou  $\langle \varepsilon_n \rangle = b^{n\beta} b^{-n\beta} = 1$ . Alors que le  $\beta$ -modèle attribue aux pixels un des deux états « mort » ou « vivant », le modèle- $\alpha$  ci après permet de dire que tel pixel est plus en vie et que tel autre l'est moins. En somme, le processus - $\alpha$  distribue aléatoirement les poids d'occurrence à chacun des éléments d'une génération donnée. Ce modèle obéit au processus binomial suivant :

$$P(\mu\varepsilon = b^{\gamma_+}) = 1 - b^{-\beta} \quad (< 1: \text{ "Moins en vie" })$$

$$P(\mu\varepsilon = b^{\gamma_-}) = b^{-\beta} \quad (> 1: \text{ "Plus en vie" }) \quad \text{avec}$$

$$\gamma_+ = \frac{\beta}{\alpha} \quad (> 0) \quad \text{et} \quad \gamma_- = -\frac{\beta}{\alpha} \quad (< 0) \cdot$$

Afin de préserver la moyenne d'ensemble, la condition suivante doit être vérifiée :

$$b^{\gamma_+} \cdot b^{-\beta} + b^{\gamma_-} \cdot (1 - b^{-\beta}) = 1$$

## 3 Modélisation

### 3.1 Matériel et Méthode

#### 3.1.1 Site de l'étude

Les valeurs qui ont servi au calage et à la validation des modèles sont celles observées sur le sous bassin versant du Rhône qu'est le Doubs. Il s'agit des chroniques de pluies, de neige et de température mesurées aux stations de mesures distribuées sur ce sous bassin, sur une période allant de 1969 à 1994.

Le bassin versant du Rhône, d'une superficie de 96100 km<sup>2</sup>, est bordé au sud par la mer méditerranée, à l'Ouest par la France( dans laquelle il est entièrement contenu) à l'Est par l'Italie et la Suisse, et au Nord-Est par l'Allemagne. Le sous bassin le Doubs est la partie située au Nord Est du bassin du Rhône. Sa superficie est de l'ordre de 7500 km<sup>2</sup>. La moyenne annuelle de pluie sur ce sous bassin versant, évaluée sur une période de 1969 à 1987 et sur l'ensemble des stations du sous bassin est de 988 mm. Les stations MouthierHautesPierre (1177 mm), Mouthe (1114 mm), Villeneuve(1105 mm) présentent les plus fortes moyennes annuelles tandis que les valeurs les plus faibles sont observées au niveau des stations LesFourgs ( 857 mm) et Moissesey (862 mm).

La moyennes journalières inter annuelles évaluées sur les 19 années et sur l'ensemble du sous bassin versant est de l'ordre de 2.70 mm.

Au total, 16 stations disposées sur ce bassin versant (voir figure ci-dessus) ont permis de constituer les chroniques utilisées dans le cadre de ce travail.

#### 3.1.2 Modèle linéaire

A partir de ces séries, nous avons constitué deux échantillons. Un premier allant de 1969 à 1987 permet de caler les paramètres du modèle. Ainsi, cet échantillon nous permet de calculer les coefficients des matrices A et B. Le deuxième échantillon allant de 1989 à 1994 permet de valider les résultats du modèle linéaire. Les calculs des coefficients de A et B sont effectués séparément pour chaque mois et pour chaque groupe des stations obtenu après regroupement des stations de mesure suivant leur proximité (voir tableau ci-dessous). Dans cette partie du Rhône, il pleut environ<sup>4</sup> 10 mois sur 12.

---

<sup>4</sup> Source : C. Gleizes (1977) Les ressources en eau, Génie Rural, Nov-Déc 1977, pp 24-34.



Figure 4 Bassin versant du Rhône

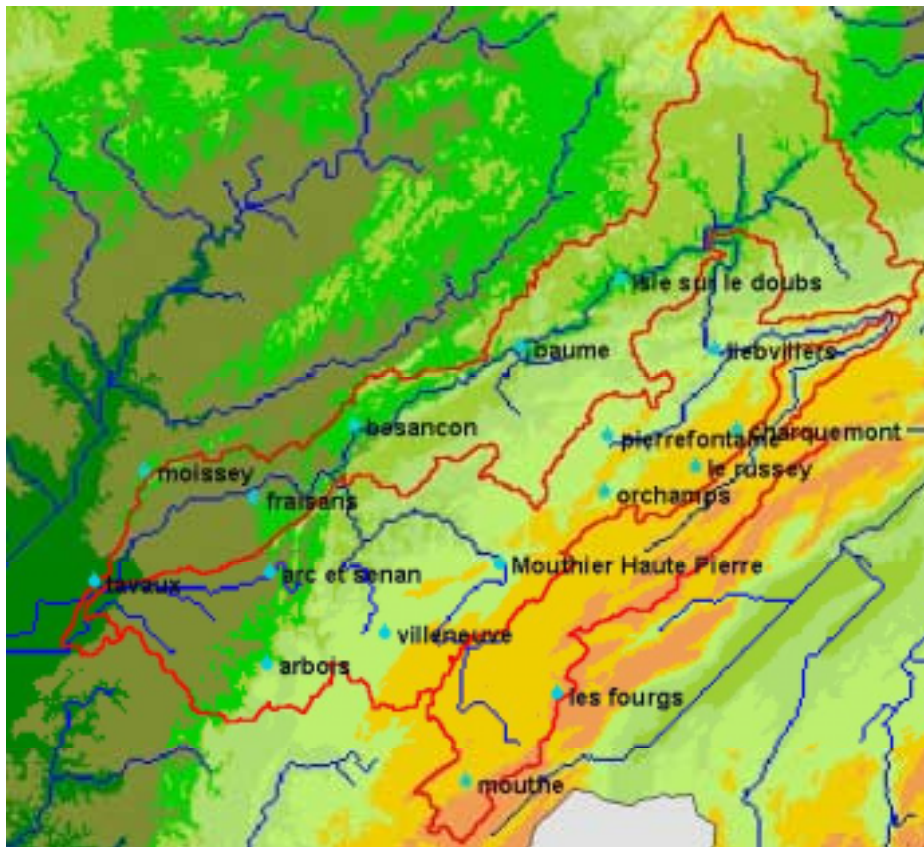


Figure 5 Sous bassin versant le Doubs avec les stations de mesure

Tableau 1 : Groupes de stations en fonction de leur proximité

Groupe	Nom stations	Coordonnées			Distance approx.
		X	Y	Z	
		km	km	m	Km
1	besancon	875.90002	2256.39990	307.00	-
	fraisans	859.50000	2244.30005	238.00	20.38
	moissey	841.40002	2248.8999	240.00	18.68
2	arbois	861.50000	2216.80005	323.00	-
	arc et senan	862.09998	2232.00000	236.00	15.21
	tavaux	832.90002	2230.39990	193.00	29.24
	villeneuve	881.09998	2221.89990	700.00	29.45
3	les fourgs	909.70001	2211.80005	1092.00	-
	mouthe	894.50000	2197.19995	936.00	21.09
4	charquemont	939.50000	2255.60010	870.00	-
	le russey	932.70001	2249.50000	895.00	9.14
	orchamps	917.50000	2245.30005	775.00	15.77
	pierrefontaine	918.09998	2254.60010	705.00	9.32
5	baume	903.70001	2269.19995	275.00	-
	Liebvillers	935.79999	2268.89990	365.00	22.10
6	mouthier-haute-pierre	900.09590	2233.11000	420.00	-

Pour le calcul des coefficients de A et B pour un mois donné, les paramètres essentiels sont : le nombre d'années (égal à 19 pour tous les mois et pour toutes les stations en ce qui concerne le calage), le nombre de jours et le groupe de stations étudié ( plus précisément le nombre de stations du groupe).

Les différents moments statistiques utilisés sont ceux obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance. On dispose donc de p variables(pour chaque mois, p est égal au nombre de jours de ce mois) et pour chacune d'elles, un échantillon de N observations ( les 19 années considérées pour la période de calage). Les variables sont les pluies journalières observées sur les 19 années qui servent au calage des paramètres. Ainsi, pour chaque jours du mois, on a un échantillon de 19 observations (les 19 années).

Le programme en fortran permet de calculer dans un premier temps les hauteurs journalières de pluies, puis les moyennes mensuelles ( totaux mensuels divisés par le nombre de jours que contient le mois) avec les écart-types autour de ces moyennes mensuelles et enfin, les moyennes journalières ( moyenne de chaque jour de l'année, sur les 19 années) avec les écart-types correspondants. Afin de faciliter la comparaison entre les valeurs générées et celles mesurées, nous avons présenté les résultats en mettant cotes à cotes les valeurs calculées et celles mesurées correspondant.

### 3.1.3 *Modèle utilisant les cascades multifractales*

Ce modèle, contrairement au premier, permet de procéder à une désagrégation spatio-temporelle. Elle est basé sur l'utilisation des modèles  $\alpha$  et  $\beta$  pour la génération des cascades multifractales. On part d'un parallélépipède dont les deux dimension horizontales (dimension d'espace) sont celles des mailles des Modèles de Circulation Générale (mailles de 200 à 500 km environ de côté) et dont la dimension verticale est celle du temps. Les valeurs mensuelles fournies par les Modèles de Circulation générale seront affectées à ce parallélépipède dont la dimension de temps sera prise égale à 32 (32 jours = environ un mois).

Le processus consiste à diviser le parallélépipède initiale en  $\lambda \times \lambda \times \lambda^{1-H}$  structures, H étant le coefficient d'anisotropie défini ci-dessus. On procède à un tirage aléatoire suivant le processus  $\beta$  pour chacune des structures obtenues. Ce tirage permet de déterminer les structures actives et celles non actives. On effectue un autre tirage dans cette même génération mais cette fois-ci suivant le processus  $\alpha$  afin de déterminer le « *degré de vie* » de chacun des éléments « *vivant* » de cette génération. La deuxième génération consiste à subdiviser chacune des structures obtenues en  $\lambda \times \lambda \times \lambda^{1-H}$  autres structures et à effectuer sur chacune des nouvelles structures obtenues, un tirage suivant le processus  $\beta$  afin de déterminer leur état « *vivant* » ou « *mort* » puis un autre suivant le processus  $\alpha$ . On procède à une itération de ce processus jusqu'à l'obtention d'une échelle jugée suffisante. Evidemment, les structures issues des structures « *mortes* » à la génération précédente restent « *mortes* » et celles issues des cellules vivantes sont soit mortes, soit vivantes avec une augmentation ou une diminution d'amplitude. Dans ces processus,  $\lambda$  et  $\lambda^{1-H}$  doivent être des entiers. Il s'agit donc de déterminer le plus petit entier  $\lambda$  ainsi que la valeur H qui permet d'avoir  $\lambda^{1-H}$  entier. Pour une valeur de H =1/3 par exemple, le plus petit entier qui permet de rendre  $\lambda^{1-H}$  entier est  $\lambda = 8$ . En effet,  $\lambda^{1-H} = \lambda^{2/3} = 4$ .

Cependant il faut remarquer que pour  $\lambda=3$  et  $\lambda^{1-H}=2$ , on trouve une valeur de

$$H = \frac{\ln(3) - \ln(2)}{\ln(3)} = 0.36907. \text{ On voit que cette valeur de } H = 0.37 \text{ est une bonne}$$

approximation de  $H = \frac{1}{3}$ .

Pour la suite, nous adopterons donc une subdivision successive de chaque dimension d'espace par 3 et une subdivision de la dimension de temps par 2. Dans ce cas, le nombre de branches défini ci-dessus vaut

$b = \lambda \times \lambda \times \lambda^{1-H} = 3 \times 3 \times 2 = 18$ . Cela veut dire que chaque structure d'une génération donnée, est subdivisée en 18 autres structures.

## **3.2 Résultats et commentaires**

### **3.2.1 Le modèle linéaire**

Les résultats du modèles sont consignés dans l'annexe A. D'après les figures A-1, on remarque que le programme génère des valeurs négatives. Ceci est choquant dans la mesures ou les valeurs que fournit ce modèle sont des hauteurs de pluies qui sont nécessairement des quantités positives. En réalité, le modèle effectue une répartition des totaux mensuels introduits sur tous les jours en fonction de la mémoire qui lui a été inculquée par les 19 années qui ont servi au calage des paramètres. En cherchant à conserver la quantité initiale introduite, le modèle effectue une répartition du total mensuel sur tous les jours, quitte à attribuer même des valeurs négatives à certains jours afin d'assurer cette conservation. C'est ce qui justifie la présence des quantités négatives dans les résultats qu'il fournit.

Les résultats de l'annexe A montrent que ce modèle conservent bien les totaux mensuels ( figures A 2). De plus, les moyennes journalières des hauteurs calculées ainsi que leur écart-types sont assez proches de ceux des hauteurs mesurées (figures A-3 et A-4). Ces figures montre également que la structures des hauteurs de pluies est conservée sur toute la période.

Puisque dans la réalité, tous les jours ne sont pas pluvieux, il serait donc judicieux d'imposer certaine contrainte, visant à d'abord à éviter la génération des valeurs négatives, tout en respectant la conservation des valeurs en entrées, et à respecter au mieux le nombre de jours pluvieux conformément à ce qui s'observe dans la réalité.

Pour empêcher le modèle de générer des pluies négatives, nous imposons que les valeurs que sort le modèle soient supérieures à une certaine valeur positive. Après observation



des valeurs mesurées, on constate que presque toutes les valeurs observées sont supérieures à 2 mm, aussi, avons-nous imposé un seuil à 2 mm pour la suite des calculs. Mais nous ne nous contentons pas seulement de faire une translation, car il faudrait reproduire au mieux les deux premiers moments. Toutes les valeurs inférieures au seuil fixé sont alors cumulées (algébriquement) et distribuées sur l'ensemble des autres valeurs. Toutes les valeurs inférieures au seuil fixé sont remplacées par des valeurs nulles. La distribution se fait proportionnellement à la quantité moyenne de pluie tombée chaque jours, pendant le nombre d'années choisies pour le calage. En effet, chaque jour du mois, nous calculons la quantité moyenne de pluie observée sur les 19 années choisies pour le calage. Nous rapportons cette quantité moyenne à la moyenne d'ensemble de tout le mois. En effet, si  $P_{ij}$  est la quantité de pluie obtenue le jour  $i$  de l'année  $j$ , alors on calcule le poids  $P_i$  correspondant au jour  $i$  de la manière suivante :

$$P_i = \frac{\left( \sum_{j=1}^{\text{Nombre d'années}} P_{ij} \right) / (\text{nombre d'années})}{\sum_{i=1}^{\text{nombre de jours}} \left[ \left( \sum_{j=1}^{\text{Nombre d'années}} P_{ij} \right) / (\text{nombre d'années}) \right]} \quad (2.1.6)$$

Ce poids, qui est d'ailleurs une probabilité, est le coefficient de distribution du cumul algébrique sur chaque valeur supérieure au seuil. On itère ce processus jusqu'à ce que toutes les valeurs négatives disparaissent de la matrice des résultats.

Le modèle ainsi corrigé fournit à sa sortie, les valeurs désagrégées, pour chaque mois et pour chaque groupe de stations (couplées avec les valeurs mesurées pour comparaison), disposées dans un tableau à deux entrées. Dans les lignes sont disposées les stations du groupe et dans les colonnes sont disposées les valeurs journalières autant de fois qu'il y a de jours dans le mois en cours de traitement. Les calculs ont été effectués dans un premier moment sur les 19 années (1969 –1987) ayant servi à effectuer le calage des paramètres afin de voir le degré de restitution du modèle. Ensuite, on a effectué les calculs sur les 6 autres années (1989-1994) afin de voir le degré de restitution du modèle dans une période qui n'a pas servie au calage de ses paramètres, mais toujours dans le même domaine spatiale. Les résultats de chaque année sont placées les unes à la suite des autres et pour chaque période. Ces résultats de calculs, sont présentés en annexe B, sous forme de graphiques pour la station de Besançon.

La mémoire inculquée au modèle à partir des séries de mesure, ainsi que la correction apportée afin d'éviter les valeurs négatives, permet de générer assez simplement ces valeurs journalières . Il n'est pas inutile de préciser que plus le nombre d'années utilisées pour

l'inférence du modèle est grand, plus le modèle fournit les valeurs proches de la réalité. Le vecteur de résidus obtenu après l'inférence du modèle permet de reproduire les valeurs journalières qui préservent les deux premiers moments. Il permet également d'éviter la génération de valeurs proportionnelles d'une année à l'autre.

Les figures B-3 de l'annexe B montrent que les totaux mensuels sont bien conservés, que ce soit pour la période de calage (1969-1987) que pour la période de validation (1989-1994). Ceci est rassurant dans la mesure où la conservation des totaux mensuels est une condition nécessaire à l'acceptation du modèle.

Cependant, les écart-types autour de ces moyennes mensuelles pour les valeurs calculées par le modèle restent inférieurs à ceux des valeurs mesurées (figure B4 en annexe). Ceci veut dire que les écarts à la moyenne mensuelle des valeurs générées sont plus serrés que ceux des valeurs mesurées. Une première réflexion par rapport à cet état de fait nous a conduit à dire que ce modèle ne tolère pas les grandes valeurs puisque le champ de fluctuations autour des moyennes mensuelles est faible. Cette réflexion est dans un premier temps confirmée par les écart-types autour des valeurs journalières (figure B5 de l'annexe B) calculées sur chacune des deux périodes, pour les mois de Janvier et Juillet. Ces figures montrent que les écart-types calculés autour des moyennes journalières des pluies calculées restent largement inférieurs à ceux des pluies mesurées. Les moyennes journalières des hauteurs calculées quant à elles, sont assez proches pour ce qui est de la période de 1969 à 1987 de celles des hauteurs mesurées. Elles sont très écartées pour la période de 1989-1994 suggérant que le modèle a du mal à représenter une époque différente de celle qui a servi à caler ses paramètres.

Les courbes comparatives entre les valeurs journalières et les valeurs mesurées sont présentées en annexe B (Figure B1 de l'annexe B). Elles montrent que la densité des pluies calculées (hauteurs non nulles) est supérieure à celle des pluies mesurées, tant pour la période de calage que pour celle de validation. On peut interpréter ceci par le fait que le modèle génère plus de nombre de jours pluvieux que ce qui est observable dans la réalité.

Les figures B-7 à B-9 représentent les nombres de jours ayant leur hauteur dans une certaine classe. Les figures B-7 et B-8 respectivement sont celles obtenues mois par mois et pour les deux périodes considérées. Toutes les valeurs journalières d'un mois de (janvier) donné sont regroupées pour toutes les années de chaque période. Les nombres de jours par classe sont calculés au sein de chaque regroupement. La figure B9 représente, quant à elle, les nombres de jours par classe pour toutes les valeurs journalières de chaque période.

L'observation de ces figures nous montre que pour les valeurs faibles de hauteurs de pluie (en l'occurrence la valeur nulle), les valeurs calculées par le modèle sont moins représentées que les valeurs mesurées. Cette tendance s'observe également pour les grandes classes, c'est à dire pour les hauteurs journalières de pluies supérieures à 10 mm.

En revanche, les classes intermédiaires sont relativement plus peuplées par les valeurs journalières calculées par le modèle que par les valeurs journalières mesurées.

Il ressort de ces observations, les analyses suivantes :

- Le modèle représente moins les valeurs faibles, plus précisément les valeurs nulles. En effet, les populations de la classe [0 ; 3] sont assez faibles pour les valeurs calculées par le modèle, comparées à celles des valeurs mesurées de la même classes.
- Pour les classes moyennes (dont les bornes sont comprises entre 3 et 10), les valeurs désagrégées sont en nombre plus élevées que les valeurs mesurées pour les mêmes classes.
- Lorsqu'on tend vers les classes plus élevées (>10), on constate que le nombre des valeurs désagrégées reprend le dessus.

Il ressort de tous ces constats que le modèle génère peu (ou pas ) de valeurs fortes de hauteur de pluie, il représente assez bien les hauteurs moyenne de pluie. Enfin, le modèle génère plus de nombre de jours de pluies que la normale, ce que traduit la faible représentation des hauteurs de basses classes. Cependant, il est important de remarquer que les variations des nombres de jours pluvieux entre deux mois quelconques restent identiques.

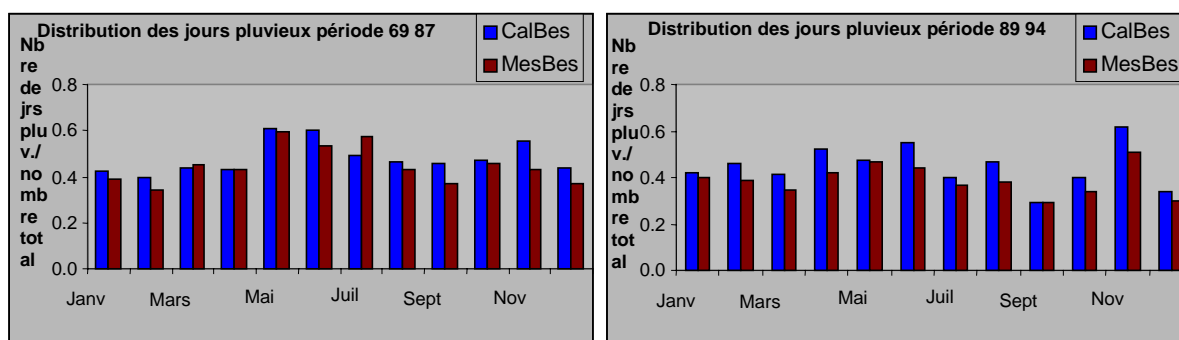


Figure 6 : Evolution des nombres de jours pluvieux (rapportés au nombre de jours de chaque mois)

Ainsi, entre janvier et février par exemple, on note une diminution du nombre de jours de pluies tant pour les valeurs calculées que pour les valeurs mesurées. Entre les mois de février et mars, on note une augmentation du nombre de jours tant pour les valeurs de pluies

observées que pour les valeurs calculées. Dans les deux cas, les nombres de jours pluvieux varient de la même manière entre deux mois. Ceci nous permet de faire dans un premier temps la conclusion que le modèle prend en compte les variations qui existent entre les nombres de jours pluvieux d'un mois à l'autre, même s'il présente un nombre de jours pluvieux plus grand.

### *Conclusion partielle*

Le modèle linéaire de désagrégation temporel que nous proposons est un modèle qui désagrège tout en préservant les quantités mensuelles initiales et respecte les deux premiers moments. Mais ce modèle représente mal les valeurs extrêmes (hauteur nulle et fortes pluies), car il les écrête, en générant beaucoup plus de jours de pluies que d'ordinaire. Une façon de résoudre ce problème serait de trouver un moyen de coupler avec ce modèle, un modèle qui permet de résoudre les problèmes d'intermittence et de successions d'événements secs et pluvieux.

### ***3.2.2 Le modèle utilisant les cascades multifractales***

Dans une première étape, nous avons commencé par étudier la variabilité des pluies de notre zone d'étude. Ainsi, nous avons calculé les cumuls moyens des précipitations sur 1 jour, 10 jours, 30 jours, 91 jours, 365 jours, 1461 jours (4 ans) et 5844 jours (16 ans), à la station de Besançon. La figure de la page suivante est le résultat des calculs. Cette figure montre que l'intensité à différentes échelles de temps présente des fluctuations extrêmes (Hubert et al, 1993). On note des variations de 0 mm par jour à 75 mm par jours. Ces variations représentent de grandes fluctuations, suggérant que la moyenne de l'ensemble, qui est de l'ordre de 2.8 mm/jours, ne peut être représentative. Cette figure donne l'aspect des cascades décrites ci-dessus ; on y remarque cette invariance de forme en passant à différentes échelles de temps. Evidemment, pour bien étudier ce phénomène, il est mieux de mesurer l'intensité des plus à la place de la mesure des hauteurs de pluie. Mais il n'est pas toujours facile d'effectuer cette mesure au niveau de toutes les stations, aussi, on devrait se contenter de l'approximation fournie par les calculs à partir des hauteurs de pluies mesurées.

Cumul moyen des précipitations sur N jours

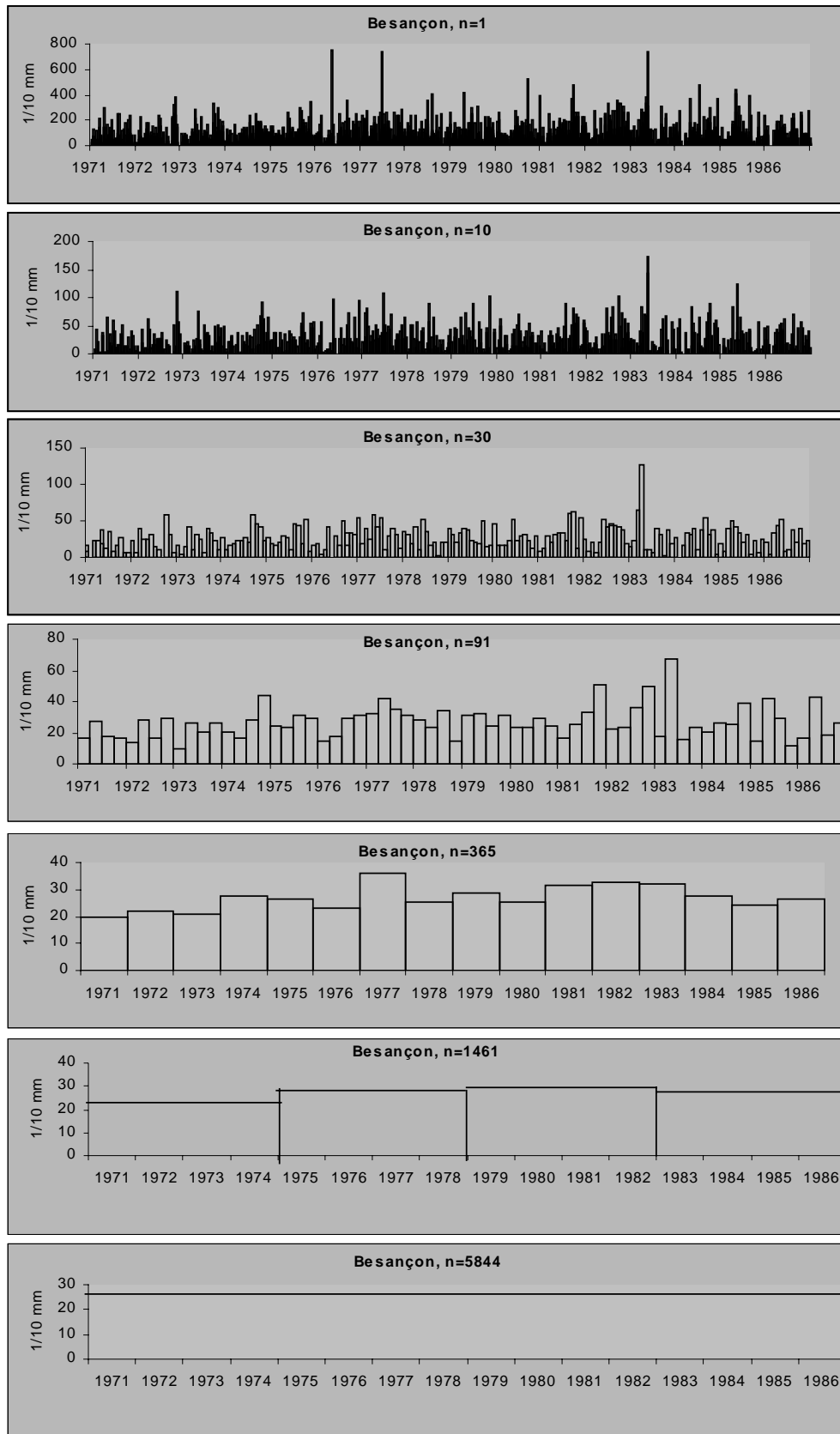


Figure 7 Variabilité des cumuls pluviométriques à Besançon selon différentes échelles de temps : de 1 jours en haut de la figure à 16 ans en bas

A présent, nous allons déterminer les caractéristiques qui nous permettront de construire la cascade, à savoir, la codimension  $c_1$  à partir de laquelle nous allons construire la probabilité de non-dépassement.

Nous avons calculé pour différentes valeurs de  $q$ , la fonction de corrélations, telle que définie dans la section 1.2.2.2., entre toutes les stations du Doubs. Toutes les distances sont calculées par rapport à la station Moissey (qui se trouve donc à l'origine des axes du graphe de la fonction de corrélation). Précisons que la fonction de corrélation est appliquée aux valeurs normalisées des pluies mesurées aux différentes stations.

*Tableau 2 Distances relatives des stations par rapport à la station Moissey*

Stations	Distance % Moissey	Stations	Distance % Moissey
moissey	0.00	Baume	65.52
fraisans	18.68	Mouthe	74.11
Tavaux	20.36	Orchamps	76.19
Arcetsenan	26.72	Pierrefontaine	76.91
Besancon	35.31	Les fourgs	77.73
Arbois	37.87	Lerussey	91.30
Villeneuve	48.01	Liebvillers	96.50
Mouthier-haute-pierre	60.78	Charquemont	98.33

Pour chaque valeur de  $q$ , nous traçons la courbe  $I(q,q)$  en fonction du logarithme la distance qui existe entre les stations. On a les résultats suivants

$$I_n^{(1,1)}(|\Delta x|) = |\Delta x|^{-0.21} \Rightarrow K(2)=0.21$$

$$I_n^{(2,2)}(|\Delta x|) = |\Delta x|^{-0.9} \Rightarrow K(4)=0.90$$

Afin de préserver la moyenne d'ensemble de la structure, il est impératif que  $K(0)=0$  et  $K(1)=0$ .

A partir de ces valeurs de  $K$ , nous avons tracé la courbe d'évolution de  $K(q)$  en fonction de  $q$ , ce qui donne la courbe de la figure 9

L'ajustement de cette courbe par deux paramètres conduit au calcul du coefficient de Levy et de la codimension  $C_1$  :

$$\alpha=1.2$$

$$C_1=0.13$$

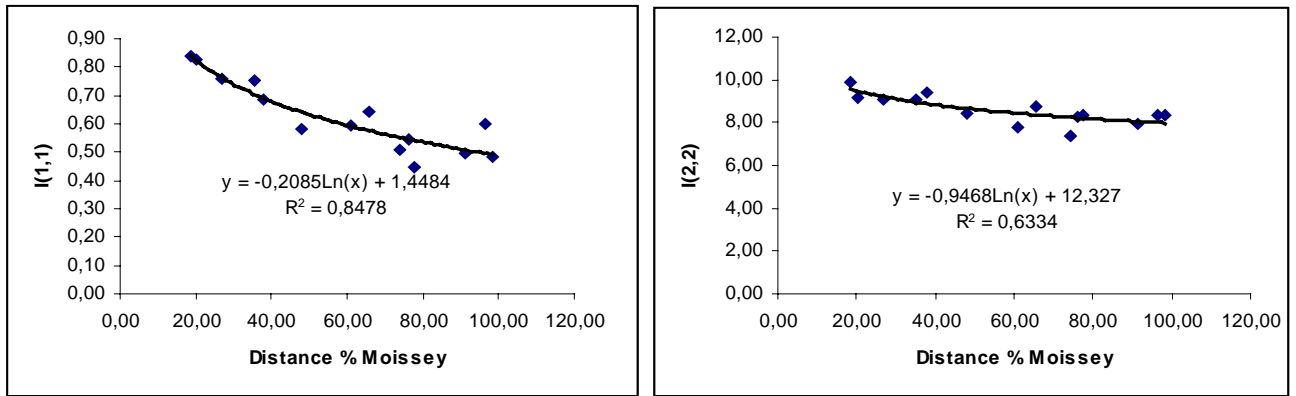


Figure 8 Fonction de corrélations des valeurs de pluie mesurées aux stations du Doubs en fonction de leur distance par rapport à la station Moisey.

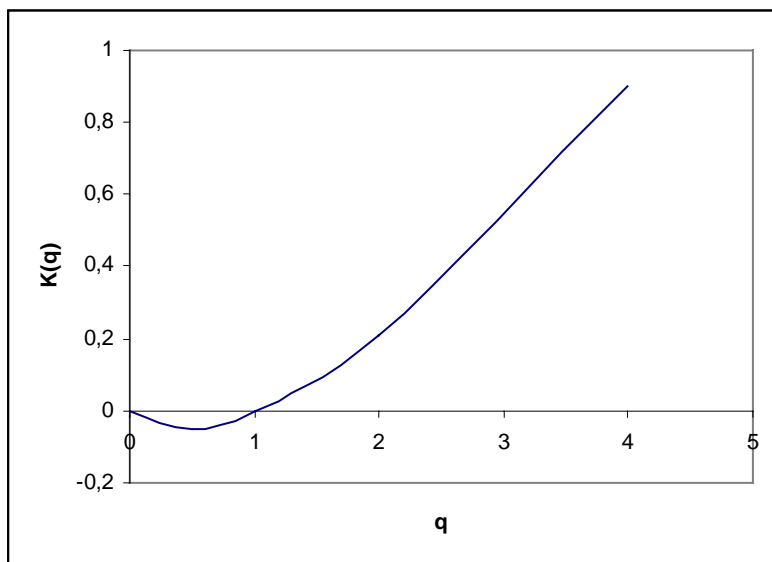


Figure 9 Fonction de structure en fonction de l'ordre des moments

Nous pouvons donc calculer la probabilité des occurrences telle qu'elle est présentée dans la formule (1.3.14).

$$\lambda^{-c} = 18^{-0.13} \approx 0.7.$$

Les cascades ont été construites avec une probabilité de non-dépassement égale à 0.7.

La figure 10 ci dessous est le résultat de la construction des cascades multifractales avec le modèle  $\beta$  pour une probabilité  $\lambda^{-c} = 0.7$ . Seule les trois premières générations (sur les 5) ont été représentées puisqu'au delà de ces trois générations, la mémoire exigée pour la représentation est très grande. On suppose qu'on part d'une boîte initiale ayant pour dimension  $x=243$  ( $3^5$ ) par  $y=243$  ( $3^5$ ) par  $t=32$  ( $2^5$ ).  $X$  et  $y$  sont les dimensions d'espace et  $t$

est la dimension du temps. Si on suppose que l'une des mailles des modèles de circulation générale a pour dimension 243 sur 243, et qu'une valeur moyenne mensuelle de pluie est attribuée à cette maille, on obtiendrait une valeur désagrégée dans les petits cubes de la cinquième génération. La désagrégation par cette méthode consiste donc à partir d'une valeur moyenne mensuelle sur une maille de dimensions 243 sur 243 et à obtenir des valeurs désagrégées au pas de temps journalier et sur des mailles de  $1 \text{ km}^2$ .

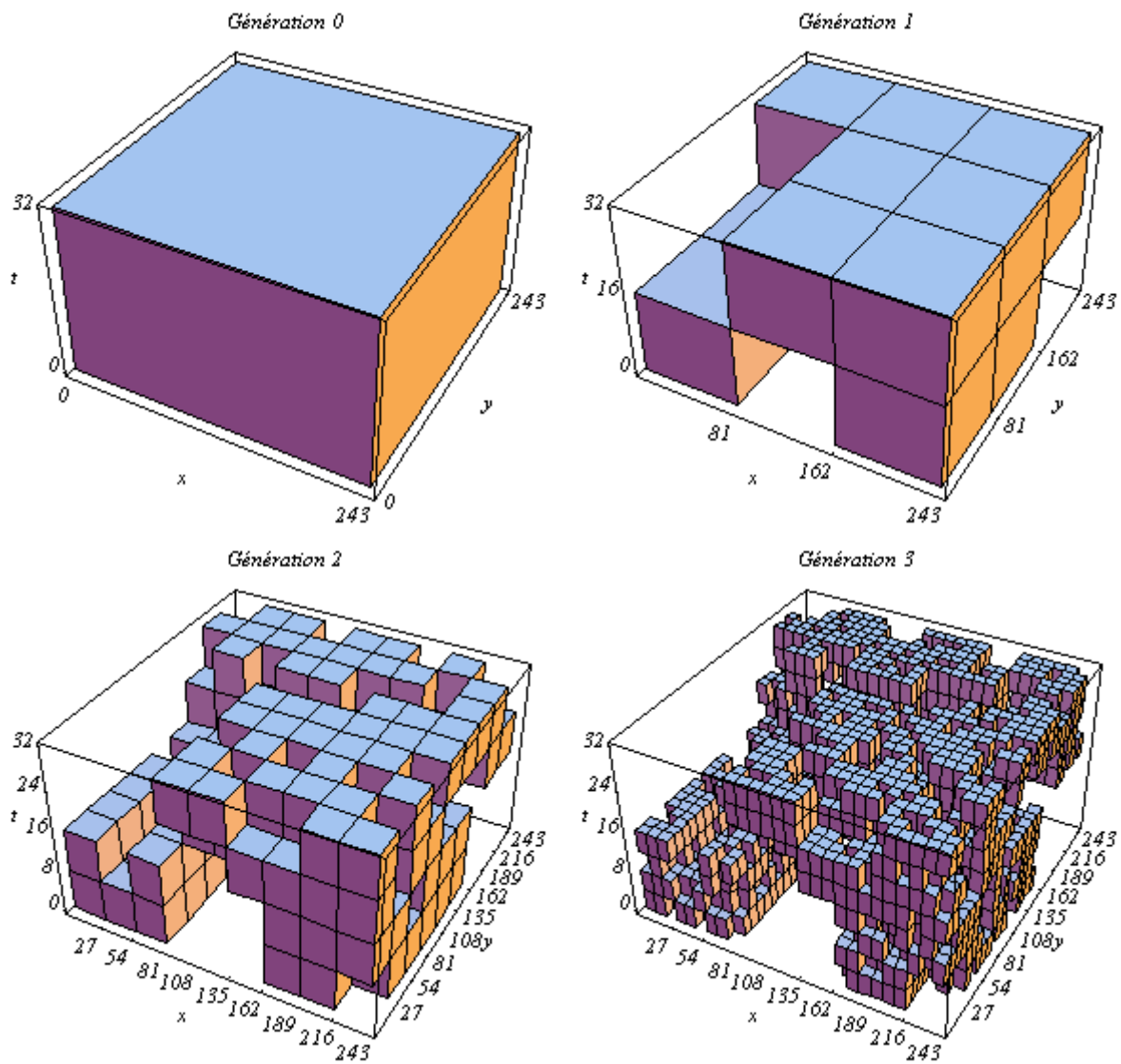


Figure 10. Résultat des cascades pour le modèle  $\beta$  (seules les trois premières générations sont représentées).

Le tableau C-1 de l'annexe C montre pour dix tirages aléatoires, l'évolution des séquences de jours pluvieux. Sur un total de 1889568 cubes élémentaires, seuls 390226 sont pluvieux (pour un tirage donné). Par ailleurs, le nombre moyen de jour pluvieux, pour un mois donné est de l'ordre de 7 jours (évidement, nous n'avons pas tenu compte des saisons).



Pour une belle appréciation de l'évolution de la distribution des pluies sur les mailles et pour un mois donné, nous avons représenté (voir annexe C ), pour un nombre de génération égal à 3, les résultats de plusieurs tirages.

Dans ce travail, nous n'avons pas pu, faute de temps, prendre en compte le modèle  $\alpha$  décrit ci-dessus qui nous aurait permis de calculer les intensités de chaque petite maille.

## 4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons abordé deux cas de désagrégation, l'une temporelle et l'autre spatio-temporelle. Dans le cas de la première méthode, les calculs ont été conduits à bout et les résultats montrent que le modèle donne globalement des valeurs désagrégées acceptables. Cependant, il est important de signaler que ce modèle représente très mal les valeurs extrêmes. Ainsi, ce modèle n'arrive pas à générer correctement les fortes hauteurs de pluie, et représente mal les jours pluvieux : On constate que le nombre de jours pluvieux générés par le modèle est supérieur à celui qu'on observe dans la réalité. Tout se passe donc comme si le modèle écrêtait les fortes valeurs de pluies, qu'il distribue sur certains jours qui n'auraient pas dû être pluvieux. Pour résoudre cette situation, il serait intéressant de coupler avec ce modèle, un modèle qui régleme la génération des jours pluvieux, par exemples les modèles auto-regressifs

Pour le deuxième modèle, les calculs ne sont pas conduits à bout. Cependant, ce modèle conduit à des résultats assez intéressants, du point de vue du nombre de jours pluvieux.

Il serait donc intéressant de continuer ce travail, afin de quantifier les intensités et donc de pouvoir comparer les résultats de ce modèle à ce qui s'observe dans la réalité.

Pour EDF société d'accueil de notre stage, nous pensons qu'il serait louable de continuer ce travail, car nous pensons qu'il devrait conduire à des résultats assez profitables pour cette société.

## Bibliographie

- Anderson, T. W., 1958. An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. *John Wiley & son, Inc.*
- Deidda, R., 2000. Rainfall downscaling in a space-time multifractal framework. *Water Resour. Res.*, 36(7): 1779-1794.
- Eagleson P. S., 1986 The emergency of Global-Scale Hydrology *Water Res. Resear.* 22-(9) 6S-14S
- Enderson-Sellers A., and McGuffie K., 1987. A Climatic Modelling Primer, *J. Wiley and Sons*, New York, 217 pages
- Gupta V. K., Castro S.L., Over M. T., 1996. On scaling exponents of spatial peak flows from rainfall and river network geometry. *J. Hydrol.* 187 91-104
- Guillot., G. and Lebel T., 1999. Dissagregation of Sahelian mesoscale convective system rain fields: Further developpements and validation, *J. Geophy. Res.*, 104(D24), 531,532-31,551
- Herzenhorn J., and Woolhiser D., A. 1987. Dissagregation of daily rainfall, *J. Hydrol.*, 95: 299-322
- Hubert P., et Carbonnel J. P., 1989. Dimension fractale de l'occurrence de pluie en climat soudano-sahélien, *Hydro. Continentale*, 4, pp. 3-10.
- Hubert P., Tessier Y., Lovejoy S., Schertzer D., Schmitt F., Ladoy P., Carbonnel J. P., Violette S., 1993. Multifractals and extreme rainfall events, *Geophys. Res. letters*, Vol 20, n°10, pp931-934.
- Hubert P. et Bendjoudi H., 1997. Caractéristiques fractales des séries pluviométriques. *FRIEND Flow Regime from International Experimental and Network Data, Projet H-5-5 (IHP IV) and 1-1 (IHP V) Third report: 1994-1997, CEMAGRREF éditions* pp 352-356.
- Johnson D.K., Entekhabi D., Eagleson P., 1991 The implementation and validation of improved landsurface hydrology in an atmospheric general circulation model, *MIT Departement pf Covil Engineering*, Ralph M. Parsons Laboratory Report N° 334, 192 Pages.
- Kahane, J.P., Peyriere, J., 1976. Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot. *Adv. Math.*, 22 : 131-145.
- Koutsoyiannis D., 1992. A nonlinear desaggregation model with a reduced parameter set for simulation of hydrologic series. *Water Resour. Res.*, 28(12):3175-3191
- Lovejoy S., 1981. A statistical analysis of rain areas In terms of fractals : *Preprint 20th conf. On radar met. AMS, Boston.* 476-484 ;
- Lovejoy S., 1982. The area-perimeter relation for rain and cloud areas. *Science* 216, 185-187.
- Lovejoy S., 1983. La géométrie fractale des nuages et des régions de pluie et les simulations aléatoires. *Houille Blanche 01* pp 431-436
- Lovejoy S., Mandelbrot B. B., 1985. Fractal properties of rain, and a fractal model. *Tellus* 37 A, 209-232.
- Lovejoy, S., Schertzer D., 1990. Multifractals, universality classes and satellite and radar measurements of cloud and rain fields. *J. Geophys. Res.*, 95: 2021-2034
- Mandelbrot B. B., 1974. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of hight moments and dimension of the carrier, *J. Fluid Mech.*, 62, pp. 331-350.
- Marsan D., Schertzer D., Lovejoy, S., 1996. Causal space-time multifractal processes: Predictability and forecasting of rain fields. *J. Geophys. Res.*, 101, D21, 26,333-26,346.

Olsson J., Niemczynowicz J., 1995 Multifractal analysis of daily spatial rainfall distributions. *J. Hydrol.* 187 29-43.

Over T. M. and Gupta V. K., 1994. Statistical analysis of mesoscal rainfall : dependence of a random cascade generator on large-scale forcing. *J Appl. Meteorol.*, 33(12) : 15426-1542.

Richardson L.F., 1992. Wheather prediction by numerical process, Cambridge University press, Republished by Dover, New-York in 1965

Rodriguez-Iturbe I., D., R., Cox, and Eagleson P. S., 1987. Mathematical models of rainstorm events in space and time. *Water Resour. Res.*, 23(1):181-190.

Schertzer D., Lovejoy, S., 1987. Physical modeling and analysis of rain and cloud by anisotropic scaling multiplicative processes. *J. Geophys. Res.*, 92: 9693-9714

Stedinger J.R., and Vogel R.M., 1984. Disaggregation procedures for generating serially correlated flow vectors. *Water Resour. Res.*, 20(1): 47-56

Tao, P. C., and Delleur, J. W., 1976. Multistation, Multiyear Synthesis of Hydrologic Time Series by Disaggregation .. *Water Resour. Res.*, 12(6): 1303-1312.

Tao, P. C., and Delleur, J. W., 1975. Models of the stochastic and chronologic structure, prediction and simulation of runoff sequences-Application to the lower Ohio basin, *Tech. Rep.60, Water Resour. Res. Center, Purdue Univ., Lafayette, Ind.*

Valencia R., D. and Schaake J., C., Jr., 1973. Dissagregation processes inn Stochastic Hydrology, *Water Ressor. Res.*, 9(4), 580-585

Washington W.M., and Parkinson C. L., 1986. An Introduction to three-dimensional climate Modeling, *University Science Books, Mill Valley, CA*, 422 pages.

Woolhiser D., A. and Osborn H., B., 1985. A Stochastic model of dimensionless thunderstorm rainfall, *Water Ressor. Res.*, 21(4), 511-522.

## ANNEXE A: Résultats avant l'application de la correction.

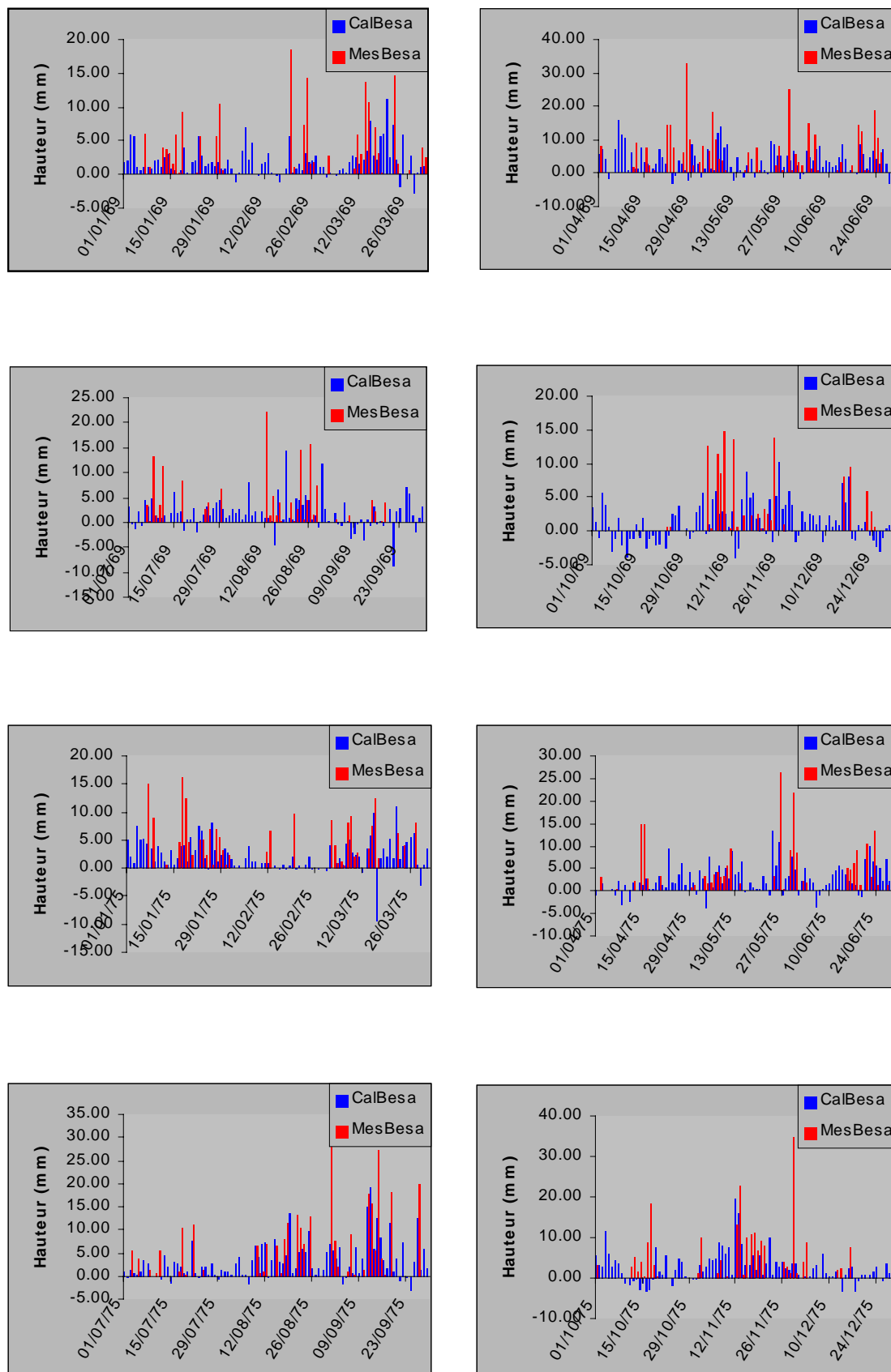


Figure A1 Hauteurs journalières de pluie, calculées et mesurées à Besançon

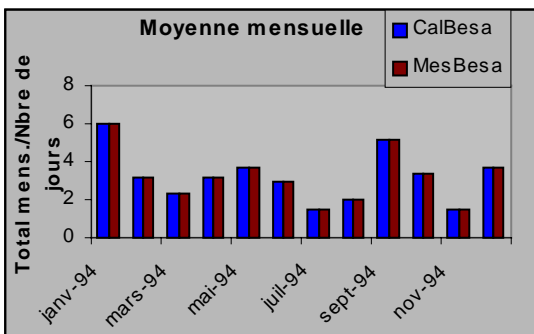
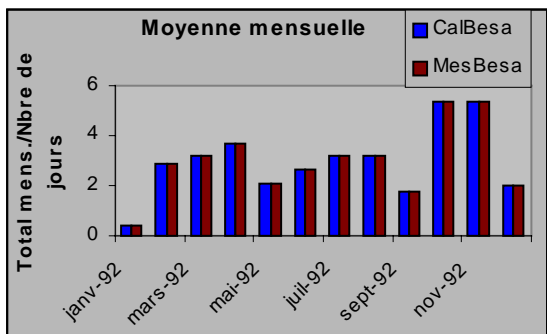
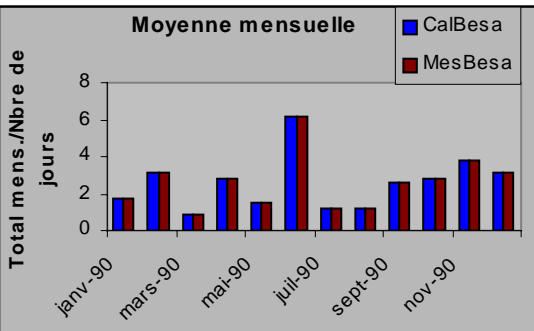
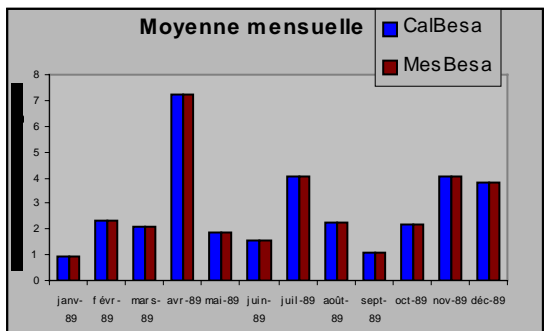
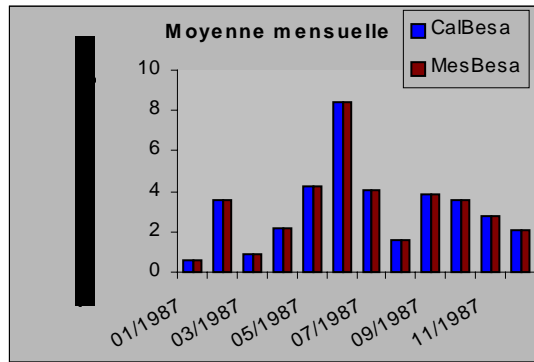
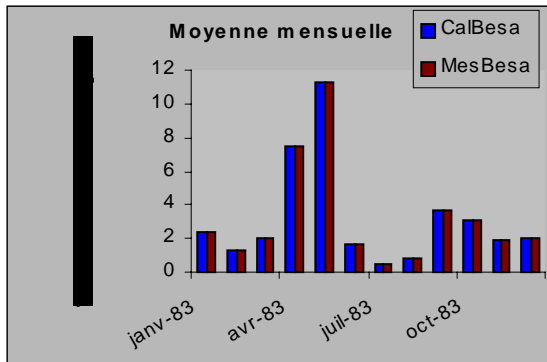
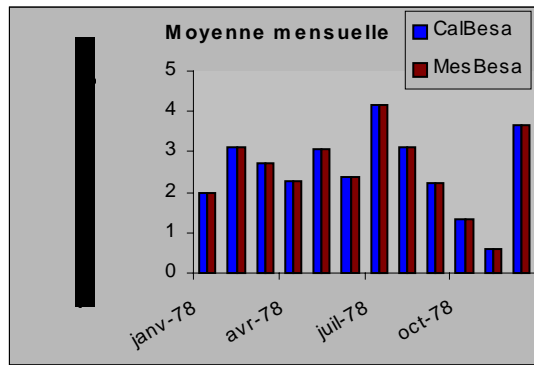
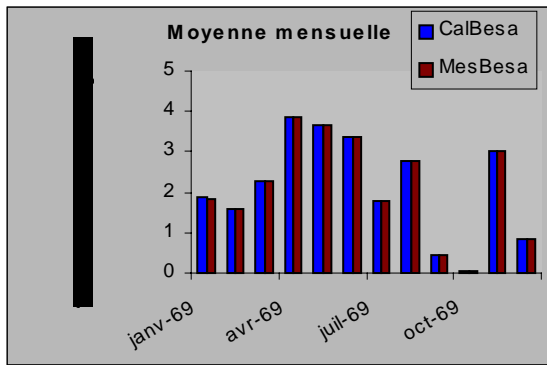


Figure A2 Moyennes mensuelles (Total mensuel divisé par le nombre de jours du mois) calculées et observées à la stations de Besançon

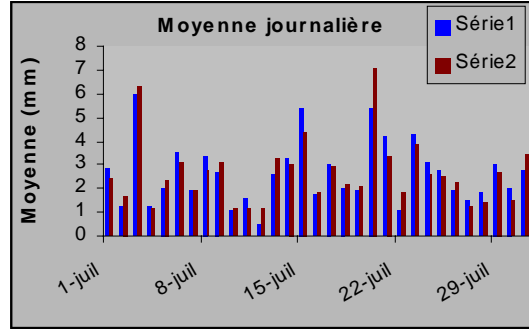
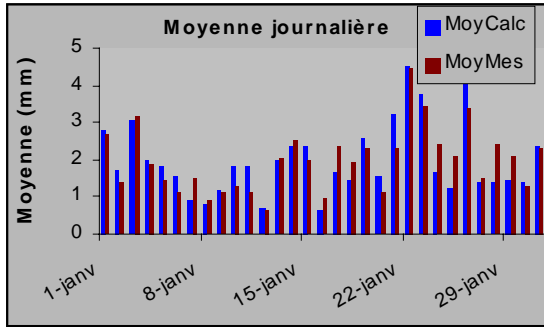


Figure A3 Moyenne journalière calculée et mesurée pour toute la période 1969-1987

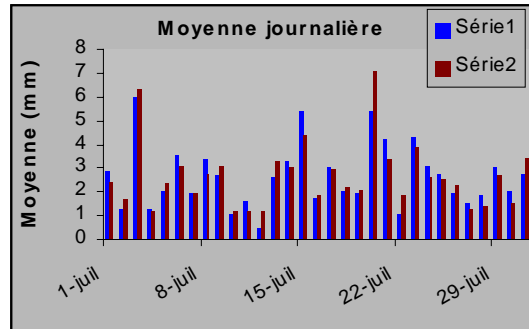
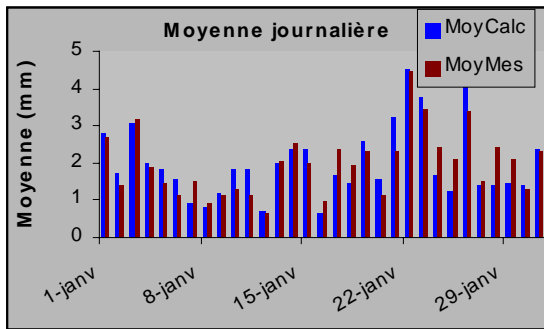


Figure A4 Ecart-type calculée et mesurée autour de la moyenne journalière pour toute la période 1969-1987

## ANNEXE B Résultats après l'application de la correction

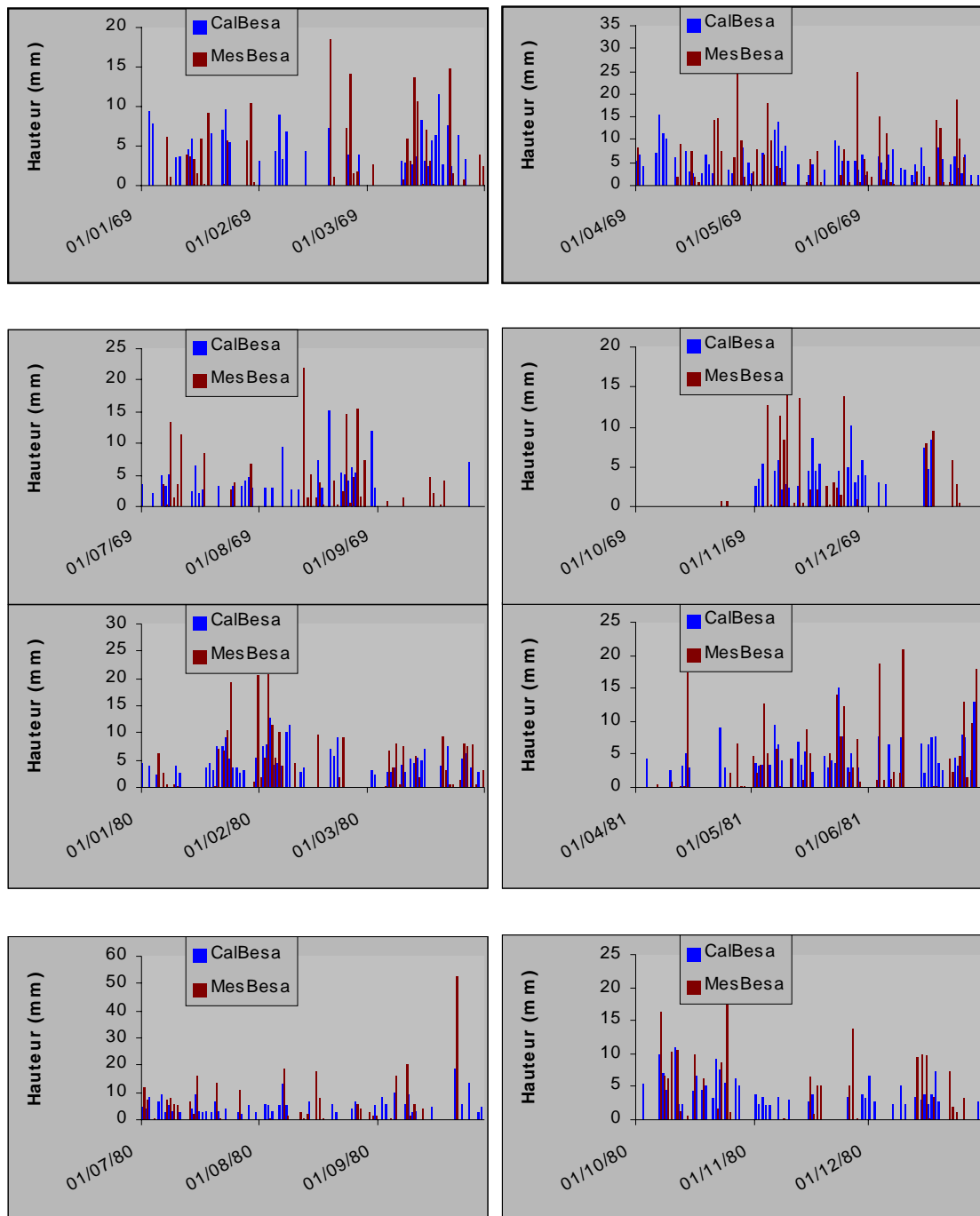


Figure B1 : Hauteurs de pluie, calculées et mesurées à la station de Besançon, période 1969-1987

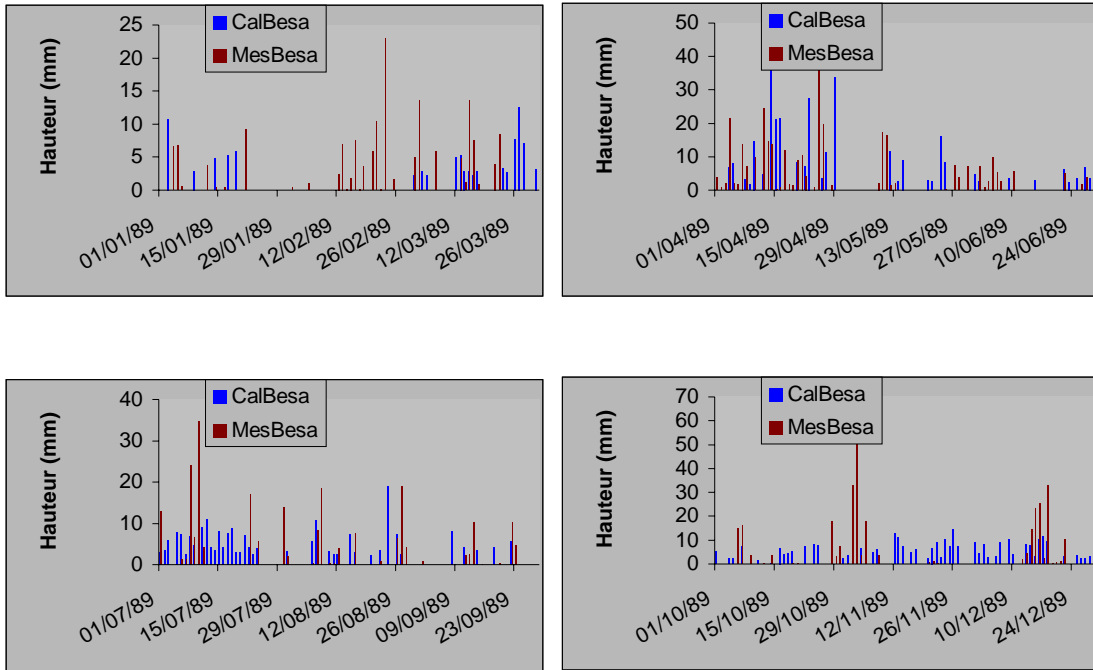


Figure B2 Hauteurs de pluie, calculées et mesurées à la station de Besançon, période 1989-1994

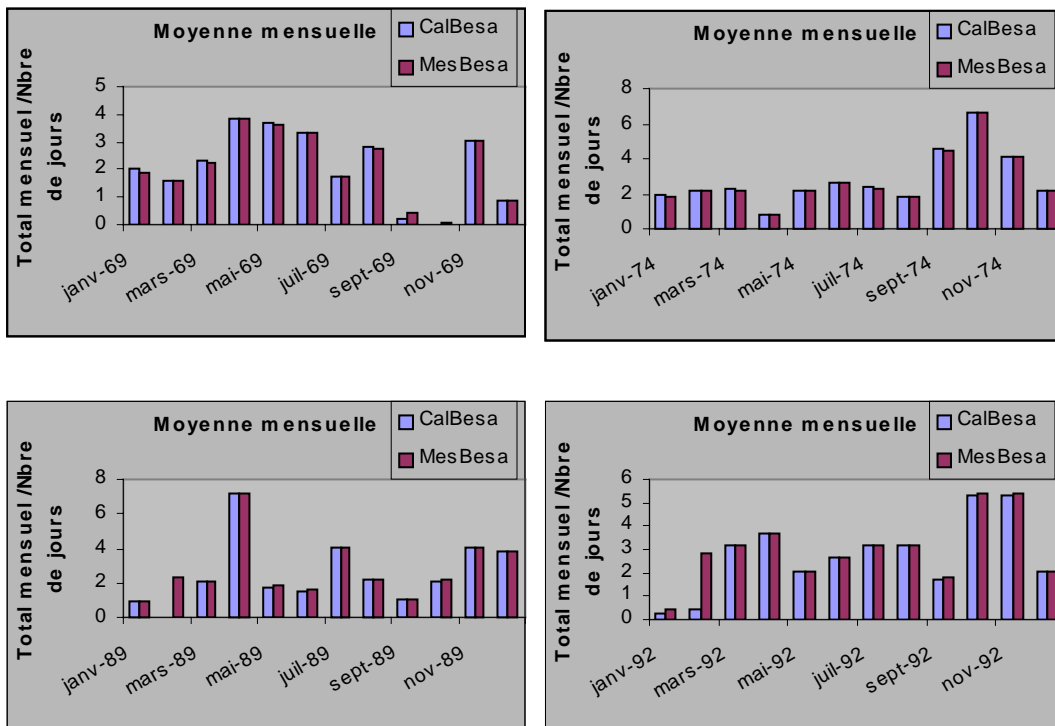


Figure B3 Moyenne mensuelle (total mensuel divisé par le nombre de jour), à la station de Besançon



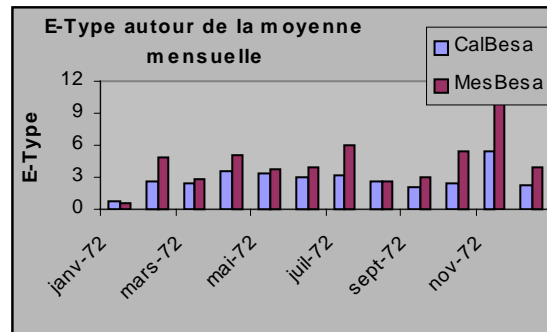
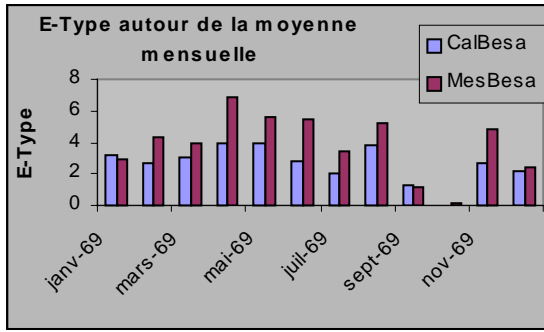


Figure B4 Ecart-type autour de la moyenne mensuelle (total mensuel divisé par le nombre de jour), à la station de Besançon

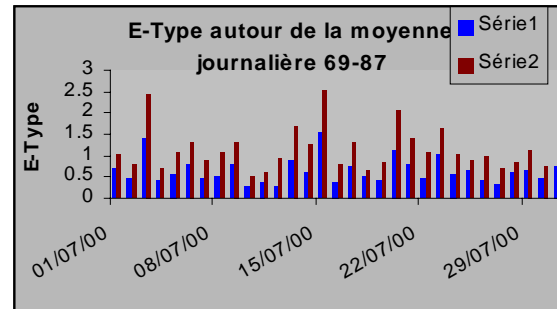
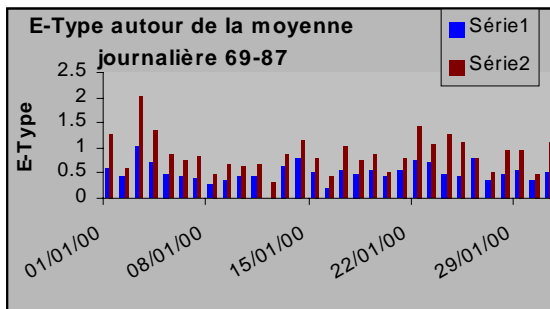
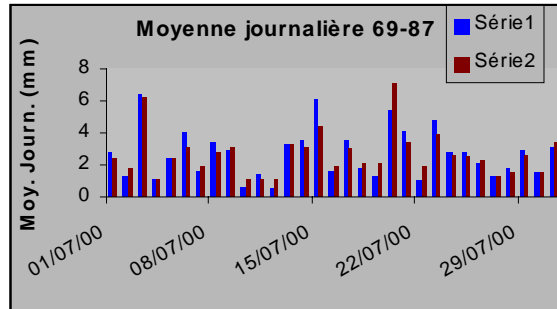
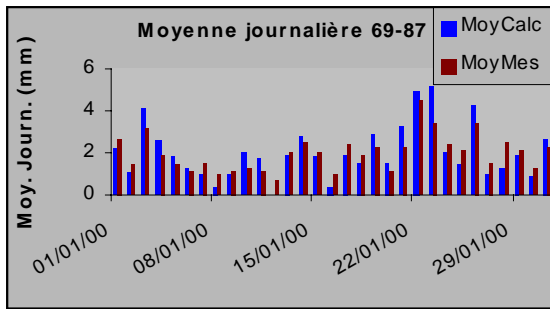


Figure B5 Moyenne journalière et Ecart-type autour de la moyenne journalière pour la période 1969-1987

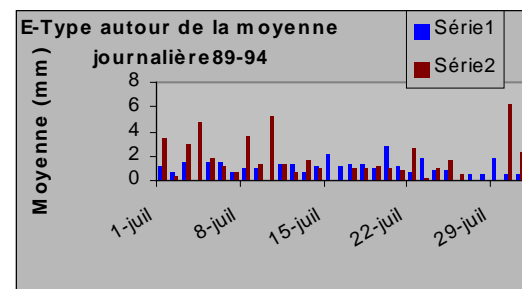
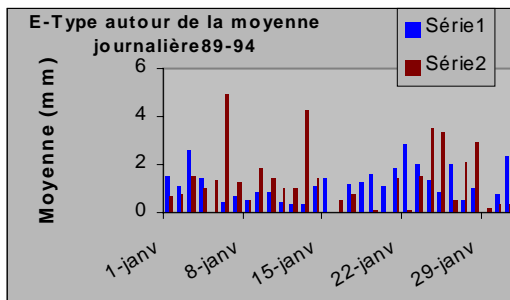
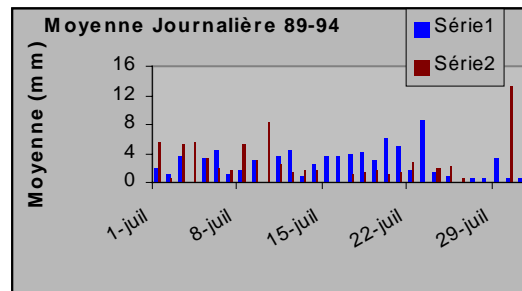
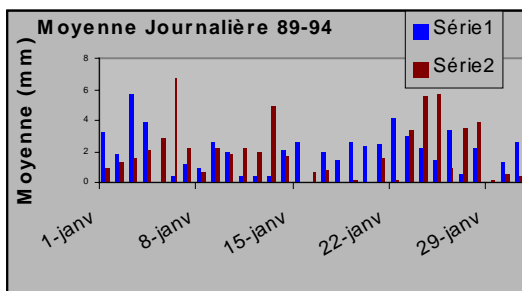


Figure B6- oyenne journalière et Ecart-type autour de la moyenne journalière pour la période 1989-1994

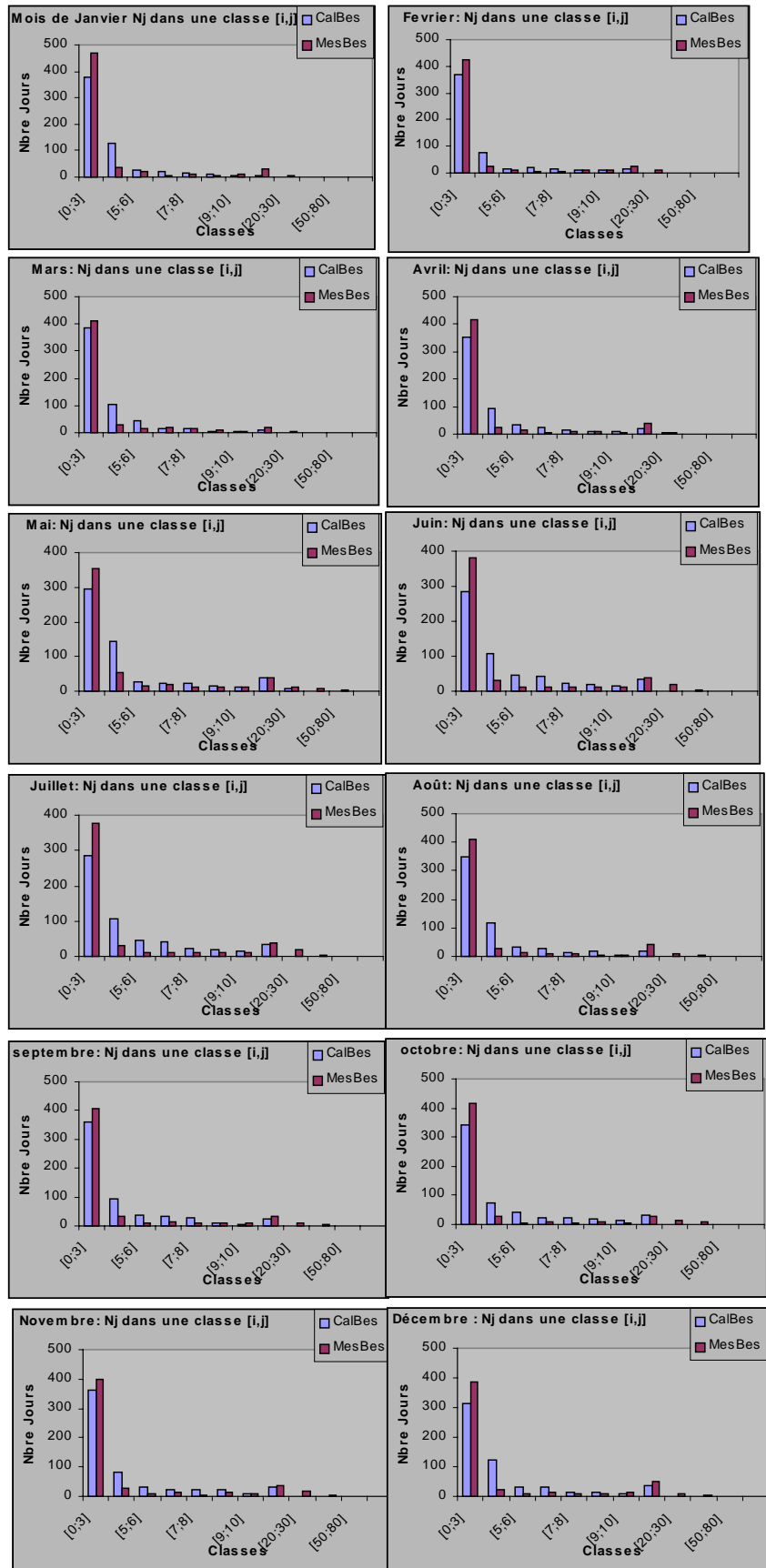


Figure B7 Nombre de jours ayant leur hauteur comprise dans une classe de hauteur donnée. Evaluation pour chaque mois et sur toute la période 1969-1989

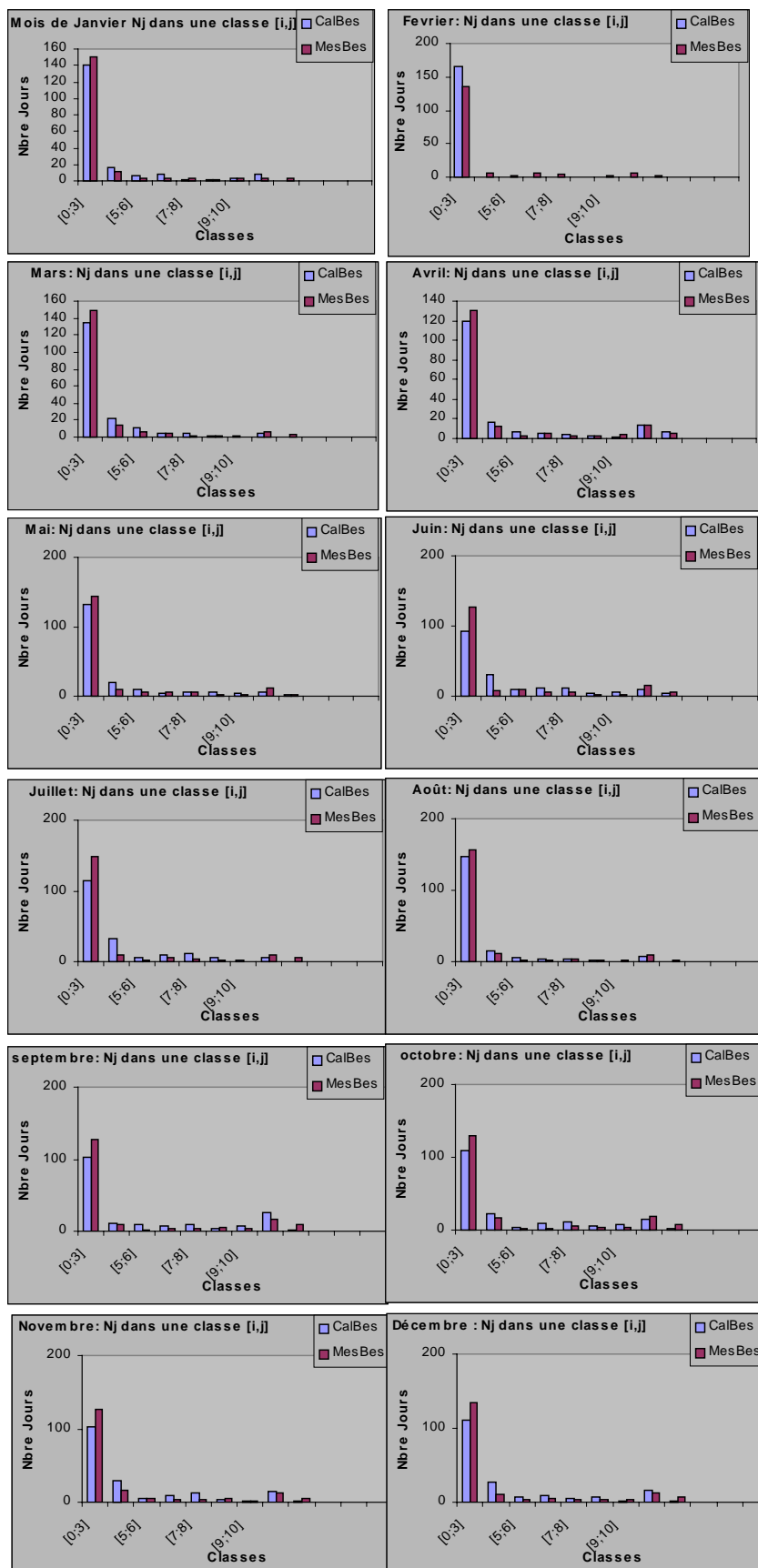
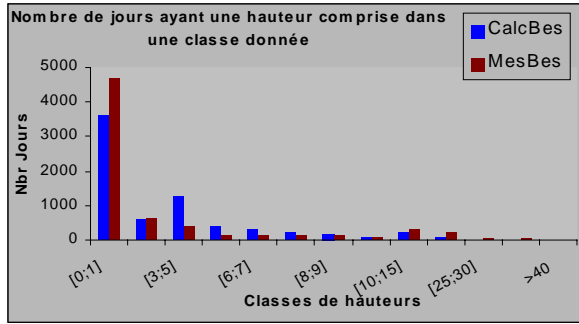
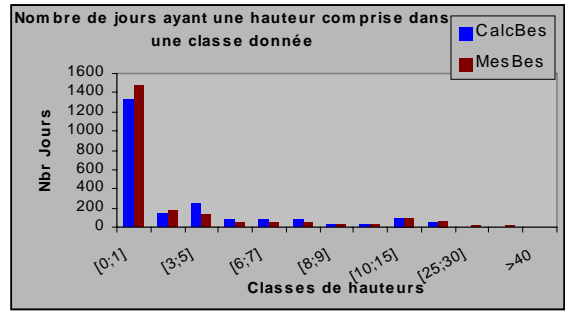


Figure B8 Nombre de jours ayant leur hauteur comprise dans une classe de hauteur donnée. Evaluation pour chaque mois et sur toute la période 1989-1994



B9a période 1969-1987



B9b période 1989-1994

Figure B9 Nombre de jours ayant leur hauteur comprise dans une classe de hauteur donnée. Evaluation par période

ANNEXE C : Résultats de cascades du  $\beta$ -modèle

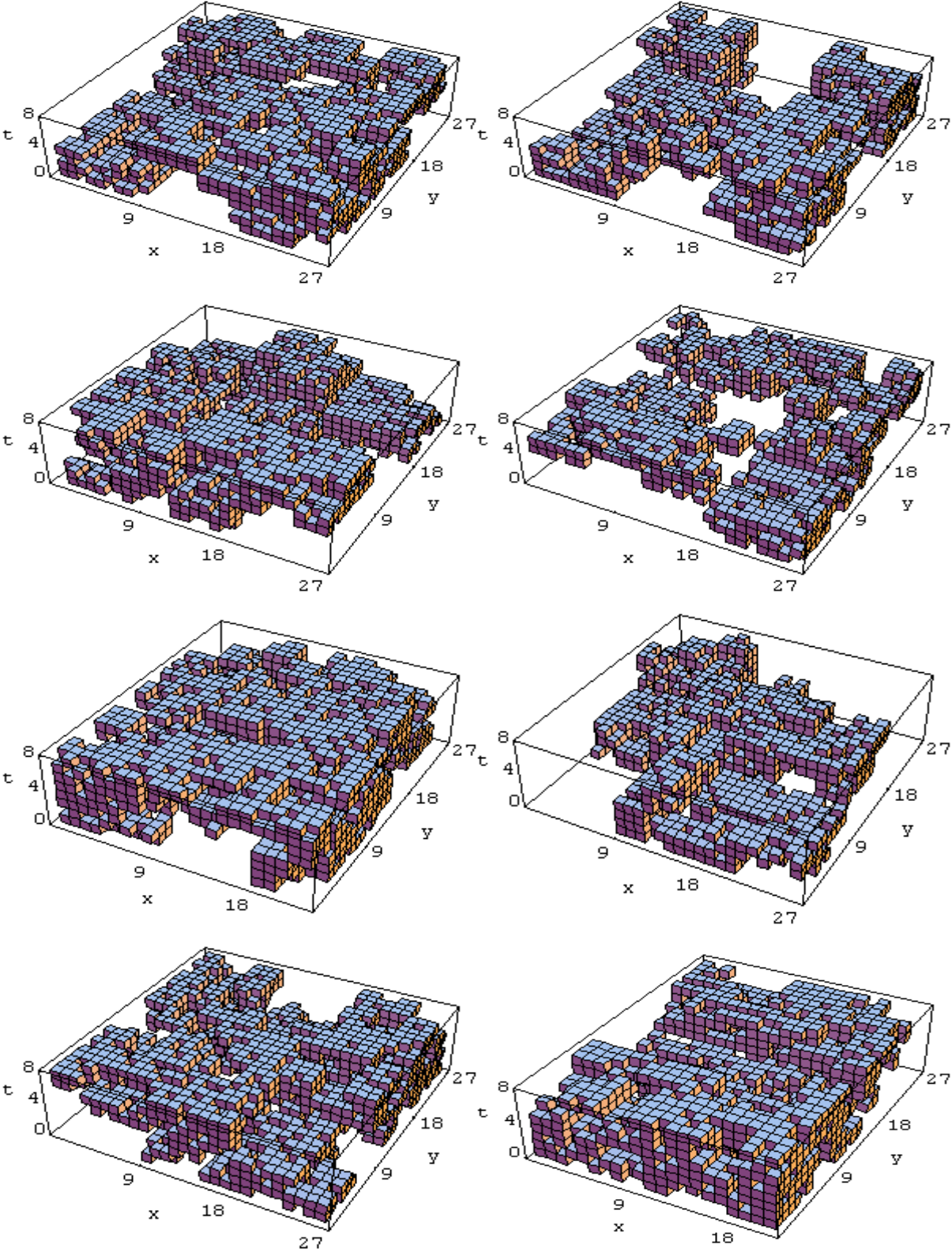


Figure C1 : 8 tirages pour  $x_{max}=y_{max}=27$  et  $t_{max}=8$

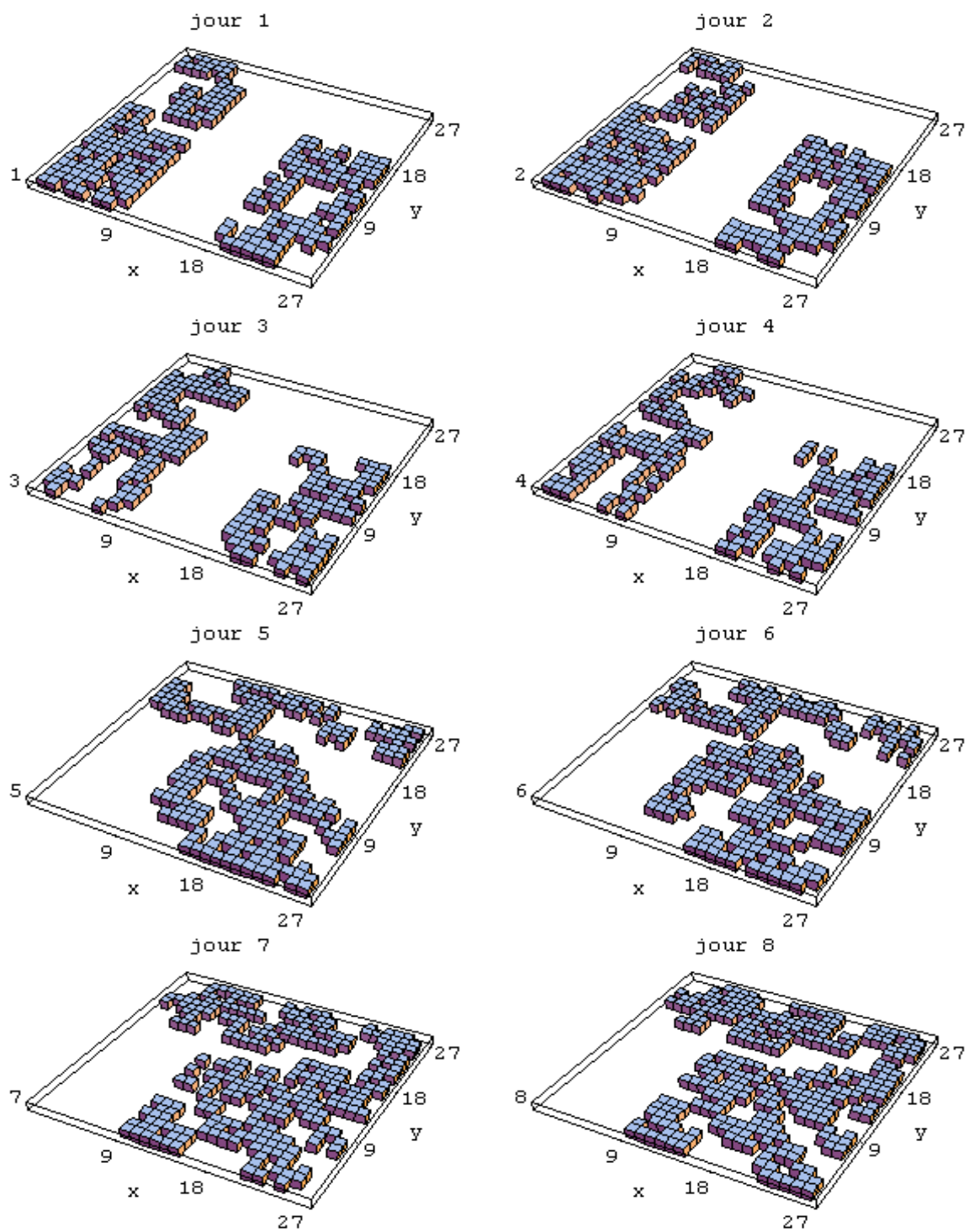


Figure C2 : détail du tirage numéro 1

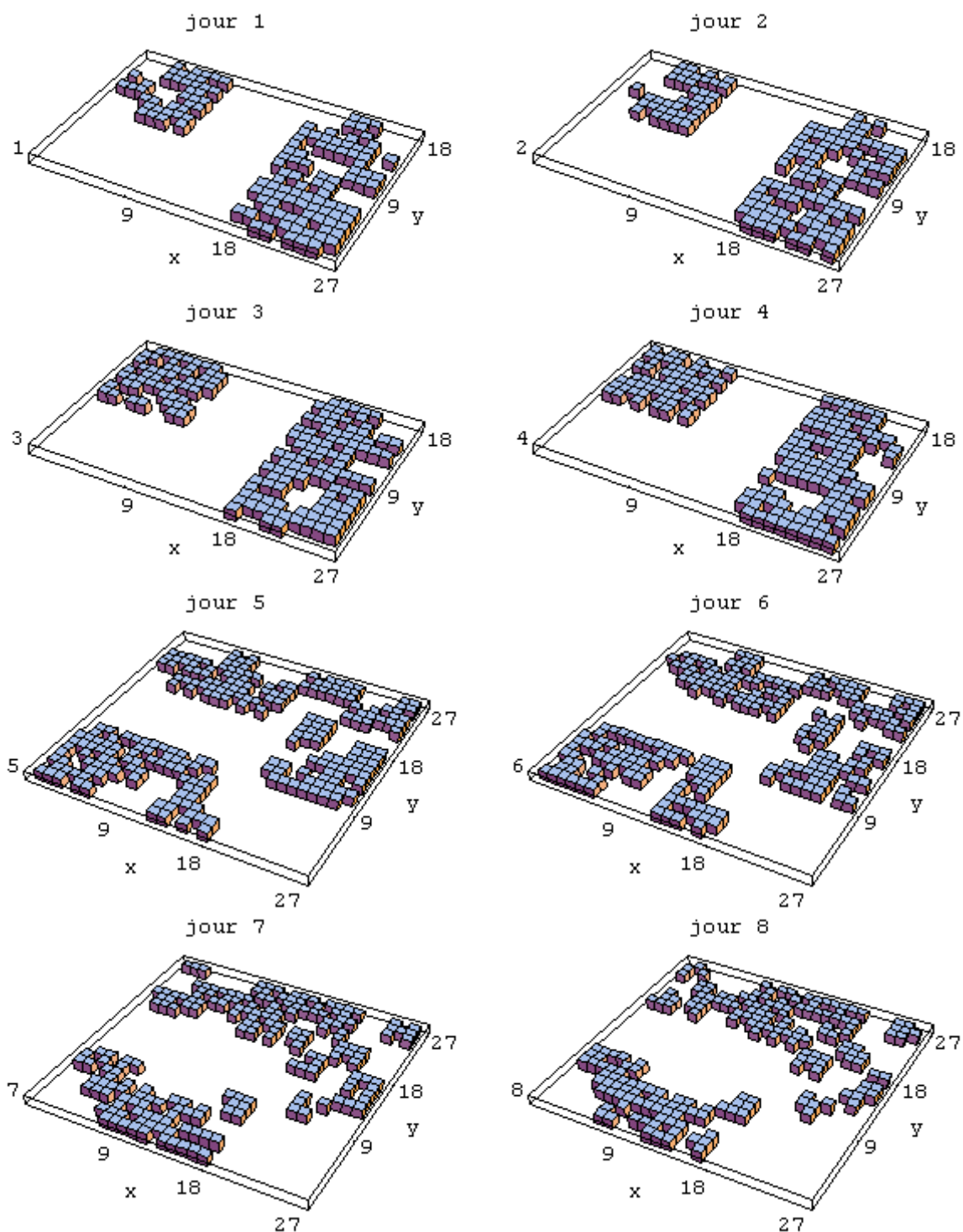


Figure C3 : détail du tirage n°4